Комплексная функция

Океанов Е.Н.

Пусть здесь комплексная функция вида $Cr = e^{j\cdot\phi}$ независимой переменной ϕ называется правой единичной комплексной функцией, а сопряженная с ней функция вида $Cl = e^{-j\cdot\phi}$ называется левой единичной комплексной функцией. Переход от показательной формы этих функций к их тригонометрической форме:

$$Cr = \cos(\phi) + j\cdot\sin(\phi) \quad \text{и} \quad Cr = \cos(\phi) - j\cdot\sin(\phi)$$

сопровождается переходом мнимой единицы из ранга показателя степени в ранг множителя при мнимой компоненте комплексной функции. Полагая при этом:

$$x = \cos(\phi) \quad \text{и} \quad y = \sin(\phi)$$

можно указанные функции интерпретировать как функции двух переменных x и y, зависящих от параметра ϕ:

$$Cr = x(\phi) + j\cdot y(\phi) \quad \text{и} \quad Cr = x(\phi) - j\cdot y(\phi)$$

Выстраивается, таким образом, логический ряд: в форме зависимости от одной переменной комплексная функция имеет мнимую единицу в ранге показателя степени, в форме зависимости от двух переменных – имеет мнимую единицу в ранге множителя. В этом ряду напрашивается заключительная стадия: в форме зависимости от трех переменных мнимая единица утрачивается. Напрашивается эта стадия потому, что в трехмерной среде обитания мнимая единица потребовалась человеку в математическом языке для отображения трехмерных математических объектов на двухмерные объекты, упрощающего аналитические операции. Комплексная плоскость и есть такой двухмерный объект. В настоящей работе ставится задача выяснить если не физическую, то хотя бы геометрическую сущность мнимой единицы.

Пусть в трехмерной декартовой системе координат X, Y, Z задана кривая V в параметрическом виде:

$$\left\{\begin{aligned} x_1(\phi) &= \cos(\phi) \\ y_1(\phi) &= \sin(\phi) \\ z_1(\phi) &= \phi \end{aligned}\right\}$$

и кривая U в параметрическом виде:

$$\left\{\begin{aligned} x_2(\phi) &= \cos(\phi) \\ y_2(\phi) &= -\sin(\phi) \\ z_2(\phi) &= -\phi \end{aligned}\right\}$$

Формулы преобразования декартовых координат в цилиндрические:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos(\phi) \\ y &= \rho\cdot\sin(\phi) \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

где ρ и ϕ - полярные координаты проекции некоторой точки пространства на плоскость $X0Y$, а z - аппликата этой точки, допускают интерпретацию заданных кривых как частный случай их задания в цилиндрических координатах при $\rho = 1$, понимая под параметром φ соответствующий полярный угол в плоскости $X0Y$, значение которого и определяется аппликатой.

Модуль r кривых V и U одинаков и определяется величиной:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

которая дает возможность вычислить соответствующие направляющие косинусы:

$$l_1 = \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad m_1 = \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad n_1 = \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$$

и

$$l_2 = \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad m_2 = -\frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad n_2 = -\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}},$$

а также позволяет воспользоваться формулами преобразования декартовых координат в сферические:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = r \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\phi) \\ y_1 = r \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\phi) \\ z_1 = r \cdot \cos(\theta_1) \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\begin{matrix} x_2 = r \cdot \sin(\theta_2) \cdot \cos(\phi) \\ y_2 = -r \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\phi) \\ z_2 = -r \cdot \cos(\theta_2) \end{matrix}\right\},$$

откуда следует:

$$\cos(\theta_1) = \frac{\varphi}{r} = \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} \quad \text{и} \quad \cos(\theta_2) = -\frac{\phi}{r} = -\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$$

Кроме того, следует учесть, что $r \cdot \sin(\theta_1) \cdot \phi = r \cdot \cos(\theta)$ в силу равенства $r \cdot \sin(\theta_1) = 1$, откуда следует: $\phi = ctg(\theta_1)$, и, соответственно, $-\phi = ctg(\theta_2)$.

Но теперь настала пора проверить выстроенный ранее логический ряд, для чего уместно правую и левую единичные комплексные функции представить в виде соответствующих координат комплексной плоскости

$$Cr \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \cos(\phi) \\ j \cdot y_1 = j \cdot \sin(\phi) \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad Cl \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = \cos(\phi) \\ j \cdot y_2 = -j \cdot \sin(\phi) \end{matrix}\right\}$$

Как известно, их полусумма равна действительной функции, а их полуразность равна мнимой функции:

$$\frac{Cr + Cl}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 = \cos(\phi) \\ j \cdot (y_1 + y_2) = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{Cr - Cl}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ j \cdot (y_1 - y_2) = j \cdot \sin(\phi) \end{matrix}\right\}$$

Теперь, следовательно, то же самое надлежит проделать с заданными кривыми:

$$\frac{V + U}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 = \cos(\phi) \\ y_1 + y_2 = 0 \\ z_1 + z_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{V - U}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = \sin(\phi) \\ z_1 - z \ = \phi \end{matrix}\right\},$$

для которых, оказывается, полусумма представлена только одной координатой x, тогда как полуразность представлена двумя координатами y и z, то есть вектором на плоскости $Y0Z$, проекцией которого и является координата y. Если исходить из того, что действительные кривые V и U математически эквивалентны единичным комплексным функциям, соответственно, Cr и Cl, т.е. логический ряд замыкается непротиворечиво (корректно), то проблема «мнимости» успешно разрешается. Действительно, свойство «мнимости» состоит в том, что координата y отображает не истинное значение полуразности, а ее проекцию, т.е. число фантомное по отношению к истинному, тогда как координата x отображает истинное значение полусуммы. Количественно «мнимость» проявляется в том, что модуль полусуммы:

$$r_s = \left|\cos(\phi)\right|$$

существенно отличается от модуля полуразности:

$$r_r = \sqrt{\sin^2(\phi) + \phi^2}$$

В качестве примера на основании изложенного можно утверждать, что в принятой декартовой системе координат мнимая единица:

$$j = \pm\sqrt{-1}$$

является вектором длиной $\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 1.862$ в плоскости YOZ, начало которого находится в начале координат, а конец имеет координаты $z_j = \pm\frac{\pi}{2}$, $y_j = \pm 1$, соответственно, правой или левой ориентации.

Принимая во внимание, что в практических задачах – а именно такие задачи и обслуживает математика в качестве инструмента – область задания функций всегда ограничена некоторыми пределами, всякую функцию следует полагать актуальной только на этой области задания. Тогда можно говорить о том, что область задания параметра ϕ: $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$ вполне определяет локальное пространство актуальных значений единичной комплексной функции, ограниченное сферами с радиусами $r_{\min} = \sqrt{1 + \phi_1^2}$ и $r_{\max} = \sqrt{1 + \phi_2^2}$, в котором единичная комплексная функция всегда однозначна.

Можно было бы полагать, что поставленная задача решена, поскольку сущность «мнимости» выявлена. Однако, рассматривался лишь частный случай единичной комплексной функции (с единичным модулем). Обобщение на случай произвольной комплексной функции можно рассматривать как расширение (сужение) локального пространства актуальных значений единичной комплексной функции введением скалярного расширяющего множителя ρ, который может зависеть от параметра φ, но может и не зависеть от него, так же, как может зависеть и от любого иного параметра.

P.S. *Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на okeanov@mail.ru*