Действительное и комплексное представления сигналов

Океанов Е.Н.

Пусть некий трехмерный энергетический процесс задан в параметрическом виде системой трех действительных функций. Пусть, в частности, таким процессом будет движение материальной точки с массой ***m*** в прямоугольных координатах ***X,Y,Z,*** параметром изменения которых является время ***t***:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (1)$$

При переходе к цилиндрическим координатам проекция траектории материальной точки на плоскость ***X0Y*** описывается полярными координатами ρ и φ в этой плоскости, естественно, зависящими от времени в данном случае, а координата ***Z*** остается неизменной:

$$x = \rho(t)\cdot\cos[\varphi(t)], \quad y = \rho(t)\cdot\sin[\varphi(t)], \quad z = z(t) \qquad (2)$$

В частном случае может быть $z = t$. Очевидная неоднородность размерностей по осям в такой системе координат несущественна в математическом смысле, однако в физическом смысле представляется недопустимой. Поэтому уместно с помощью вспомогательной функции соответствия $b(t)$ координату Z представить в виде:

$$z = b(t)\cdot\varphi(t) \qquad (3)$$

и через эту координату выразить две другие:

$$x = \rho(t)\cdot\cos\left[\frac{z(t)}{b(t)}\right] \qquad y = \rho(t)\cdot\sin\left[\frac{z(t)}{b(t)}\right] \qquad (4)$$

Поскольку выражения (4) содержат всю информацию о данном процессе, их можно рассматривать как строго адекватное отображение действительного трехмерного процесса на действительную плоскость. На основании формул Эйлера выражения (4) можно привести к виду:

$$x = \frac{1}{2}\cdot\rho(t)\cdot e^{j\varphi(t)} + \frac{1}{2}\cdot\rho(t)\cdot e^{-j\varphi(t)} \text{ и } y = \frac{1}{j2}\cdot\rho(t)\cdot e^{j\varphi(t)} - \frac{1}{j2}\cdot\rho(t)\cdot e^{-j\varphi(t)} \quad (5)$$

Теперь можно записать комплексную функцию:

$$\overset{\circ}{\Psi}(t) = x(t) + jy(t) = \rho(t)\cdot e^{j\varphi(t)}, \qquad (6)$$

и комплексно сопряженную с ней:

$$\overline{\Psi}(t) = x(t) - jy(t) = \rho(t)\cdot e^{-j\varphi(t)}, \qquad (7)$$

которые являются, таким образом, аналитической формой представления действительного трехмерного процесса. В математическом смысле Ψ – функция является математическим объектом, точно определяющим положение точки в трехмерной системе координат. В физическом смысле эта функция точно определяет положение материальной точки в трехмерном физическом пространстве. Поэтому можно надеяться, что между данной математической моделью и реальным физическим пространством существует строгая адекватность.

На основании известных формул преобразования (прямоугольных координат в цилиндрические) полярные координаты в плоскости $X0Y$ записываются в виде:

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \qquad \varphi(t) = \mathrm{Arctg}\,\frac{y(t)}{x(t)}, \qquad (8)$$

откуда следует:

$$\frac{z(t)}{b(t)} = \mathrm{Arctg}\,\frac{y(t)}{x(t)} \qquad (9)$$

Дифференцирование выражения (9) по $\boldsymbol{t}$ сводится к уравнению:

$$\frac{b(t)}{b^2(t)}\cdot\frac{dz}{dt} - \frac{z(t)}{b^2(t)}\cdot\frac{db}{dt} = \frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (10)$$

Пусть теперь выполняются равенства:

$$\frac{db}{dt} = c(t)\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = f(t)\cdot\frac{dy}{dt}, \qquad (11)$$

где $c(t)$ и $f(t)$ - некие произвольные функции времени, выполняющие роль соответствующих коэффициентов пропорциональности. Тогда выражение (10) принимает вид:

$$\frac{b(t)}{b^2(t)}\cdot f(t)\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{z(t)}{b^2(t)}c(t)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (12)$$

и появляется возможность приравнять коэффициенты при производных:

$$\frac{1}{b(t)}\cdot f(t) = \frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \qquad (13)$$

и

$$\frac{z(t)}{b^2(t)}\cdot c(t) = \frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \qquad (14)$$

Совместное решение этих уравнений приводит к результату:

$$\frac{c(t)}{f(t)} = \frac{\mathrm{tg}[\phi(t)]}{[\phi(t)]} \qquad (15)$$

В простейшем варианте выбора произвольных функций $c(t)$ и $f(t)$ можно полагать:

$$c(t) = \mathrm{tg}[\phi(t)] \quad \text{и} \quad f(t) = \phi(t) \qquad (16)$$

При этом уместно учесть:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \cos[\phi(t)] - \rho(t) \cdot \sin[\phi(t)] \cdot \frac{d\phi}{dt} \qquad (17)$$

и

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \sin[\phi(t)] + \rho(t) \cdot \cos[\phi(t)] \cdot \frac{d\phi}{dt} \qquad (18)$$

Тогда равенства (11), с учетом подстановки в них значений (16-18) принимают вид:

$$\frac{db}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \sin[\phi(t)] - \rho(t) \cdot \sin^2[\phi(t)] \cdot \frac{1}{\cos[\phi(t)]} \cdot \frac{d\phi}{dt} \qquad (19)$$

и

$$\frac{dz}{dt} = \phi(t) \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \sin[\phi(t)] + \phi(t) \cdot \rho(t) \cdot \cos[\phi(t)] \cdot \frac{d\phi}{dt}, \qquad (20)$$

а интегрирование последних приводит к результату:

$$b(t) = \rho(t) \cdot \left\{2 \cdot \sin[\phi(t)] - \ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi(t)}{2}\right)\right]\right\} \qquad (21)$$

и

$$z(t) = \rho(t) \cdot \{2 \cdot \phi(t) \cdot \sin[\phi(t)] + \cos[\phi(t)]\} \qquad (22)$$

Если систему координат с единой размерностью по осям понимать как физическую систему координат, то исходный трехмерный энергетический процесс в физической системе координат вполне определяется тремя действительными уравнениями:

$$x = \rho(t) \cdot \cos[\phi(t)]; \; y = \rho(t) \cdot \sin[\phi(t)]; \; z = \rho(t) \cdot \{2 \cdot \phi(t) \cdot \sin[\phi(t)] + \cos[\phi(t)]\} \quad (23)$$

или одним комплексным:

$$\Psi(t) = \rho(t) \cdot e^{j \cdot \phi(t)}$$

Проверка – в среде MathCAD 7.0, в файле “polisig.mcd”.

Изложенное позволяет заключить, что всякий раз, когда математическое решение физической задачи требует использования комплексных функций, решаемая физическая задача является трехмерной.

P.S. *Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на okeanov@mail.ru*