Деление на вектор

*Океанов Е.Н.*

В векторной алгебре пространства операция деления на вектор не рассматривается, поскольку считается неопределенной и потому бессмысленной. Между тем, можно показать, что эта операция в той или иной форме неизбежно присутствует в теоретических положениях, хотя явным образом это обстоятельство не констатируется. Например, радиус-вектор $r$ в трехмерном пространстве $X,Y,Z$ вполне определяет некоторую кривую в этом пространстве и его дифференциал (вектор!):

$$dr = idx + jdy + kdz \qquad (1)$$

в определении производной какой-либо функции $S$ по радиус-вектору:

$$\frac{dS}{dr} = f(x,y,z)$$

как раз и приводит к необходимости ясного понимания процедуры деления на вектор. Ее не замалчивать надо, а исследовать. В частности, на этом именно примере.

Свойство «мнимости», рассмотренное в работе «Комплексная функция», позволяет вектор (1) представить в комплексном виде:

$$dr = dx + j\sqrt{dy^2 + dz^2} \qquad (2)$$

или в эквивалентном виде:

$$dr = |dr|\cos\alpha + j|dr|\sin\alpha = |dr| \cdot e^{j\alpha} \qquad (3)$$

где $\cos\alpha = \dfrac{dx}{|dr|}$ - направляющий косинус по оси $X$. Действительно, вынося за

.

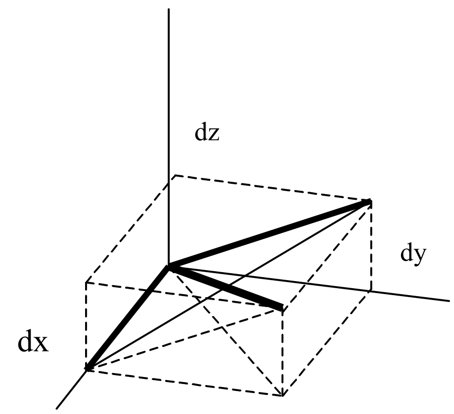


Рис.1. Вектор в комплексной форме

скобки модуль, вектор (1) можно выразить через его направляющие косинусы:

$$dr = |dr|\left(i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma\right),$$

которые, соответственно, равны:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{|dr|}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{|dr|}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{|dr|}$$

На рис.1 рассматриваемый вектор разложен на компоненты по осям, но выделены только его компонента по оси $X$ и компонента в плоскости $Y0Z$, образованная из двух компонент по осям $Y$ и $Z$ их векторным сложением. Это очевидно и не требует более подробных комментариев. Но

*Copyright 2001 © **Nonlinear Technology** - Океанов Евгений Николаевич.*
*Перепечатка и любое использование, как статьи, так и идей положенных в ее основу запрещено без разрешения авторов.*
*Свои отзывы и предложения Вы можете отправлять автору – okeanov@mail.ru*

теперь на основании равенства (3) можно операцию деления на вектор представить корректным отношением:

$$\frac{1}{dr} = \frac{e^{-j\alpha}}{|dr|} \qquad (4)$$

и, конечно же, немедленно применить его к решению проблемы дивергенции центрального поля. Вообще говоря, ни справочная, ни учебная литература по математике эту проблему не ставит. То есть, ее как бы и нет. Следовательно, сначала надо явно обозначить эту проблему.

Если координаты, от которых зависит упомянутая выше функция $S$, в свою очередь, зависят от некоторого параметра $t$:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (5)$$

то равенства (5) есть ни что иное, как параметрическое задание радиус-вектора $r$:

$$r = ix + jy + kz \qquad (6)$$

Производная величины $S$ по параметру $t$ определяется, как известно, соотношением:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \qquad (7)$$

правую часть которого формально можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla U \cdot \frac{dr}{dt}, \qquad (8)$$

где: $\nabla S = \left( i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot S$ может быть как вектором, так и скаляром, в зависимости от характера величины $S$, что и вынуждает говорить именно о формальном представлении. Однако, не только формально, но и по существу, производную (7), как известно, можно выразить и через иной параметр, например, через параметр $r$:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr}\frac{dr}{dt} \qquad (9)$$

Но тогда становится очевидным равенство:

$$\frac{dS}{dr} = \nabla S, \qquad (10)$$

которое и порождает упомянутую проблему, если в качестве величины $S$ выступает радиус-вектор $r$. Действительно, этот радиус-вектор порождает центральное поле, дивергенция которого по математическим канонам равна 3:

$$div r = 3,$$

как это и утверждается на стр. 542 «Справочника по математике» И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева, например. Между тем, непосредственная подстановка значения:

$$S = r$$

в выражение (9) приводит к очевидному результату:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dr}\frac{dr}{dt}$$

со столь же очевидным выводом:

$$\frac{dr}{dr} = 1,$$

тогда как подстановка этого же значения в выражение (10):

*Copyright 2001 © **Nonlinear Technology** - Океанов Евгений Николаевич.*
*Перепечатка и любое использование, как статьи, так и идей положенных в ее основу запрещено без разрешения авторов.*
*Свои отзывы и предложения Вы можете отправлять автору - okeanov@mail.ru*

$$\frac{dr}{dr} = \nabla r$$

немедленно приводит к очевидному противоречию математическим канонам. Явным образом это противоречие уместно представить в виде:

$$1 = \frac{dr}{dr} = \nabla r = 3$$

Комплексное представление векторов, рассмотренное выше, показывает, что на самом деле здесь имеет место не противоречие, а принципиально неверное толкование сущности векторного оператора $\nabla$. Ведь в математике специально подчеркивается его символический характер, отчего *результат его применения не может ставиться в соответствие какому-либо числу*. Этот оператор упрощает вычисления в векторном анализе именно потому, что всегда скрывает в себе тройку чисел, а не одно число. Даже когда эта тройка вся скалярная. Как в случае дивергенции. И подмена этой тройки чисел одним числом – такая же грубая ошибка, как полтора землекопа в задачке школьника, у которого корова плотоядна. Другими словами, конечно же, дивергенция (расхождение) центрального поля равна единице:

$$div r = 1 \qquad (11)$$

Это единственно верный результат в том и только в том смысле, что масштабный коэффициент координатных осей этого поля всюду постоянный и равен единице, а суммировать эту единицу по всем осям в единое число не только нет никакого смысла, но и чревато серьезными недоразумениями. Особенно, когда дивергенция (иных полей) не равна 1. Тогда число, подменяющее ее сущность, просто обязано привести к искажению решаемой задачи и, как следствие, к заведомо неверному результату.

Возможно, в изложенных доводах скрыта ошибка, равноценная ошибке школьника, упомянутой выше. Сомнительно, чтобы такая существенная проблема не была обнаружена или не проявила себя ранее. Тем полезнее было бы обсуждение настоящей работы.

Copyright 2001 © **Nonlinear Technology** - Океанов Евгений Николаевич.
Перепечатка и любое использование, как статьи, так и идей положенных в ее основу запрещено без разрешения авторов.
Свои отзывы и предложения Вы можете отправлять автору – okeanov@mail.ru