Энергия движущегося тела

Океанов Е.Н.

Пусть тело массой m движется вдоль пути $x(t)$ со скоростью $V(t)$ под воздействием силы $F(t)$. Предполагается, что начальная скорость V_0 и начальное ускорение A_0 не равны нулю. При этом мгновенная мощность $P(t)$, развиваемая движущимся телом на интервале времени $t = t_0 + \tau$ определяется произведением:

$$P(t) = F(t) \cdot V(t)$$

Соответственно, механическая энергия движущегося тела на этом интервале времени определяется интегралом:

$$E(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V(t) \cdot F(t) \cdot dt = m \cdot \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt \qquad (1)$$

Интеграл в правой части равенства (1), выраженный через ускорение и скорость, можно сугубо математически представить в двух различных формах, используя метод интегрирования по частям. Например, полагая $u = \dfrac{dx}{dt}$ и $dv = \dfrac{d^2x}{dt^2} \cdot dt$, этот интеграл можно представить в форме:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dx}{xt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt = \frac{dx}{xt} \cdot \left(\frac{dx}{dt} + V_0 \right) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left(\frac{dx}{dt} + V_0 \right) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dx}{xt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt - V_0^2,$$

откуда следует:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot V_0^2 \qquad (2)$$

и тогда выражение (1) принимает вид кинетической энергии:

$$Ek(\tau) = \frac{m \cdot V^2(t_0 + \tau)}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} \qquad (3)$$

в функции интервала времени. Но можно положить $u = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и $dv = \dfrac{dx}{dt} \cdot dt$. Тогда, при значении начального пути X_0, упомянутый интеграл можно выразить в форме:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot (x + X_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} (x + X_0) \cdot \frac{d^3x}{dt^3} \cdot dt = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot x - \int_{t_0}^{t_0+\tau} x \cdot \frac{d^3x}{dt^3} \cdot dt - X_0 \cdot A_0,$$

а выражение (1) принимает вид:

$$E(\tau) = F(t_0 + \tau) \cdot x(t_0 + \tau) - m \cdot X_0 \cdot A_0 - m \cdot \int_{t_0}^{t_0+\tau} x \cdot \frac{d^3x}{dt^3} \cdot dt, \qquad (4)$$

в котором угадывается разность между потенциальной энергией (в функции интервала времени) и некоторой энергией, смысл которой станет ясным из дальнейшего. Сначала, однако, надо пояснить, почему подчеркивается функциональная зависимость от интервала времени τ, а не от текущего времени t. Дело в том, что все реальные наблюдаемые процессы всегда протекают в ограниченном интервале времени и с инженерной точки зрения всякая функция времени актуальна только на своей области задания – именно на заданном ограниченном интервале времени. Все, что может произойти вне заданного интервала времени, утрачивает смысл в силу своей неопределенности, а потому и не требует исследования. Отличие же функции интервала времени от функции текущего времени легко определить на примере функции пути:

$$x(\tau)=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\frac{dx}{dt}\cdot dt=x(t_0+\tau)-x(t_0)=x(t)-X_0,$$

то есть это отрезок пути, который движущееся тело определенно пройдет за конечный промежуток времени от начального момента текущего времени до конечного момента текущего времени. Стало быть, всякая функция интервала своей независимой переменной есть разность между этой функцией текущего значения независимой переменной и начальным значением этой функции. Следовательно, выражение (3) кинетической энергии можно теперь представить в виде:

$$Ek(\tau)=\frac{m\cdot}{2}\cdot V^2(t)-\frac{m}{2}\cdot V_0^2=Ek(t)-Ek_0$$

Соответственно, потенциальную энергию также можно записать в виде:

$$Ep(\tau)=F(t)\cdot x(t)-m\cdot A_0\cdot X_0=Ep(t)-Ep_0$$

Если изменение скорости во времени называют ускорением, то, очевидно, изменение силы во времени вполне можно называть усилием. Но тогда именно под энергией усилия уместно понимать интеграл:

$$Eu(\tau)=m\cdot\int_{t_0}^{t_0+\tau}x(t)\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\cdot dt=Eu(t)-Eu_0,$$

поскольку величина $m\cdot\frac{d^3x}{dt^3}$ как раз и определяет изменение силы во времени. Но теперь, в силу того, что выражения (2) и (4) представляют собой две различные формы одной и той же величины, можно записать очевидное уравнение баланса энергии:

$$Ek(\tau)=Ep(\tau)-Eu(\tau), \qquad (5)$$

которое следует понимать в том смысле, что кинетическая энергия движущегося тела равна разности между работой силы и работой усилия на области задания. В функции текущего времени уравнение (5) принимает вид:

$$Ep(t)-Ek(t)-Eu(t)-(Ep_0-Ek_0-Eu_0)=0, \qquad (6)$$

который в буквальном смысле показывает вообще, что энергия «ниоткуда не берется и никуда не исчезает». Уравнение баланса энергии в форме (6) ставит под сомнение понятие так называемой «полной энергии» тела в виде суммы его потенциальной и кинетической энергий. Во-первых, потому, что равенство потенциальной и кинетической энергий движущегося тела является частным случаем энергетического процесса, имеющим место лишь при постоянном (во времени) ускорении. Во-вторых, потому, что полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий только при еще одном дополнительном условии: сила направлена противоположно направлению пути $x(t)$.

В какой мере справедливы изложенные рассуждения, можно судить по примеру механического осциллятора, рассмотренного в среде MathCAD в файле «oscillat.mcd». Готовится продолжение этой темы, где будут затронуты некоторые вопросы тяготения, получающие трактовку, принципиально отличающуюся от традиционной, разумеется, без посягательства на закон тяготения.

P.S. *Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на okeanov@mail.ru*