Энергия, пространство…

Океанов Е.Н.

Пусть тело массой m движется в пространстве X, Y, Z и уравнения пути движения заданы в параметрической форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1}$$

Тогда скорость движения тела определяют уравнения:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}, \tag{2}$$

а ускорение – уравнения:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3}$$

При этом можно вектор скорости выразить через его компоненты:

$$V = iV_x + jV_y + kV_z \tag{4}$$

и аналогично представить вектор механической силы:

$$F = m\left(iW_x + jW_y + kW_z\right) = iF_x + jF_y + kF_z, \tag{5}$$

на основании чего величину мощности P можно выразить через скалярное произведение вектора силы на вектор скорости:

$$P = F \cdot V \tag{6}$$

Поскольку речь идет о движении в пространстве, естественно исходить из того, что энергия E движения данного тела является функцией координат этого пространства:

$$E = E(x, y, z), \tag{7}$$

а ее производная по времени – мощность P - имеет вид:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{8}$$

который можно записать в векторной форме скалярного произведения:

$$P = gradE \cdot V, \tag{9}$$

и тогда непосредственно из сравнения этой мощности с выражением (6) вытекает равенство:

$$F = gradE = i\frac{\partial E}{\partial x} + j\frac{\partial E}{\partial y} + k\frac{\partial E}{\partial z} \tag{10}$$

Результат дифференцирования по времени выражения (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2E}{dt^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z}\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + \\ &+ \left(\frac{\partial E}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial E}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь уместно выражение (9) переписать с учетом равенства (10) в виде:

$$\frac{dE}{dt} = F \cdot V \tag{12}$$

Совершенно очевидно, что результат (11) должен быть достигнут дифференцированием по времени выражения (12), то есть:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = V \cdot \frac{dF}{dt} + F \cdot \frac{dV}{dt} \tag{13}$$

При этом сразу легко заметить, что сумма, выделенная скобками в правой части выражения (11), на основании выражения (13) равна:

$$F\frac{dV}{dt}=\frac{\partial E}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (14)$$

в связи с чем для остальной части выражения (11) обязано выполняться равенство:

$$\begin{aligned}V\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial^2E}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2E}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\\&+2\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+2\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt}+2\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}\end{aligned} \qquad (15)$$

Если это равенство переписать в виде:

$$\begin{aligned}V\frac{dF}{dt}&=\left(\frac{\partial^2E}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\frac{dx}{dt}+\\&+\left(\frac{\partial^2E}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\frac{dy}{dt}+\left(\frac{\partial^2E}{\partial z^2}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dz}{dt}\end{aligned}, \qquad (16)$$

то его можно рассматривать, как скалярное произведение двух векторов, и тогда становится очевидным равенство:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=i\left(\frac{\partial^2E}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dt}\right)+j\left(\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}\frac{dz}{dt}\right)+\\&+k\left(\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned} \qquad (17)$$

Но в этом равенстве, в свою очередь, каждое выражение в скобках есть результат скалярного умножения векторов, один из которых – скорость V - входит множителем в каждое выражение. То есть, если ввести в рассмотрение векторы:

$$D1=i\frac{\partial^2E}{\partial x^2}+j\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}+k\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z},$$

$$D2=i\frac{\partial^2E}{\partial x\partial y}+j\frac{\partial^2E}{\partial y^2}+k\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z},$$

$$D3=i\frac{\partial^2E}{\partial x\partial z}+j\frac{\partial^2E}{\partial y\partial z}+k\frac{\partial^2E}{\partial z^2},$$

то выражение (17) можно записать в виде вектора:

$$\frac{dF}{dt}=i(D1\cdot V)+j(D2\cdot V)+k(D3\cdot V), \qquad (18)$$

координаты которого в скобках – скаляры в виде соответствующих скалярных произведений. Однако, введенные векторы, с учетом соотношения (10), можно представить в виде:

$$D1=\frac{\partial}{\partial x}\left(i\frac{\partial E}{\partial x}+j\frac{\partial E}{\partial y}+k\frac{\partial E}{\partial z}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}gradE,$$

$$D2=\frac{\partial}{\partial y}\left(i\frac{\partial E}{\partial x}+j\frac{\partial E}{\partial y}+k\frac{\partial E}{\partial z}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}gradE,$$

$$D3=\frac{\partial}{\partial z}\left(i\frac{\partial E}{\partial x}+j\frac{\partial E}{\partial y}+k\frac{\partial E}{\partial z}\right)=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}gradE,$$

что позволяет записать выражение (18) в новой форме:

$$\frac{dF}{dt} = \left(i\frac{\partial F}{\partial x} + j\frac{\partial F}{\partial y} + k\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (19)$$

Но, если исходить из того, что сила F в общем случае ее проявления в пространстве является функцией координат:

$$F = F(x, y, z), \qquad (20)$$

то непосредственное дифференцирование этой функции по параметру t приводит в точности к правой части результата (19). И это хорошо, ибо указывает на отсутствие ошибок до сей поры. Но сила является вектором, что позволяет выразить ее, как в выражении (5), через компоненты:

$$F = iF_x + jF_y + kF_z,$$

в которых координаты (множители при ортах) определяются, очевидно, координатами градиента энергии, или соотношениями:

$$F_x = \frac{\partial E}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial E}{\partial y}, \qquad F_z = \frac{\partial E}{\partial z} \qquad (21)$$

Но тогда и производная силы по времени – усилие (по аналогии с ускорением) – тоже вектор, в выражении (19) которого:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

в правой его части, как-то спрятаны орты. Другими словами, должно выполняться равенство:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = i\frac{dF_x}{dt} + j\frac{dF_y}{dt} + k\frac{dF_z}{dt} \qquad (22)$$

откуда следуют соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} = i\frac{dF_x}{dt}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = j\frac{dF_y}{dt}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = k\frac{dF_z}{dt} \qquad (23)$$

А это означает, что координаты усилия могут быть скалярными только в том случае, если они есть результат скалярного умножения соответствующих векторов:

$$\frac{dF_x}{dt} = \left(i\frac{\partial F}{\partial x} \right) \cdot \left(i\frac{dx}{dt} \right), \qquad \frac{dF_y}{dt} = \left(j\frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \left(j\frac{dy}{dt} \right), \qquad \frac{dF_z}{dt} = \left(k\frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(k\frac{dz}{dt} \right) \qquad (23)$$

Кроме того, непосредственно из выражения (19) следует, что усилие можно представить в векторной форме:

$$\frac{dF}{dt} = divF \cdot V = divF\left(i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \right), \qquad (24)$$

где скалярным множителем при скорости является дивергенция силы. Тогда устраняется проблема скрытытх ортов потому, что становятся очевидными соотношения:

$$i\frac{dF_x}{dt} = i\frac{dx}{dt}divF, \qquad j\frac{dF_y}{dt} = i\frac{dy}{dt}divF, \qquad k\frac{dF_z}{dt} = k\frac{dz}{dt}divF \qquad (25)$$

и тем самым подтверждается векторный характер частных производных силы в соотношениях (23). Поскольку сила F пропорциональна ускорению, причем коэффициентом пропорциональности m является скаляр, который называют массой и который характеризует инерцию (чего-то в пространстве), постольку векторное свойство сила приобретает от ускорения. Поэтому силу можно представить вектором ускорения со скалярным множителем, который в общем случае может зависеть от времени:

$$F = m(t)\frac{dV}{dt} \qquad (26)$$

Тогда усилие принимает вид:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d^2V}{dt^2}m + \frac{dm}{dt}\frac{dV}{dt} \qquad (27)$$

и из сравнения выражений (24) и (27) вытекает уравнение:

$$divF \cdot V = \frac{d^2V}{dt^2}m + \frac{dm}{dt}\frac{dV}{dt} \qquad (28)$$

Но массу в пространстве естественно понимать в общем случае, как функцию координат:

$$m = m(x, y, z), \qquad (29)$$

в связи с чем ее производная по параметру t имеет вид:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial m}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial m}{\partial z}\frac{dz}{dt} = gradm \cdot V \qquad (30)$$

Соответственно, и уравнение (28) принимает вид:

$$divF \cdot V = \frac{d^2V}{dt^2}m + gradm \cdot V\frac{dV}{dt} \qquad (31)$$

Но, поскольку начиналось исследование с энергии, постольку и выражать это уравнение уместно через энергию:

$$divgradE \cdot V = \frac{d^2V}{dt^2}m + gradm \cdot V\frac{dV}{dt}, \qquad (32)$$

или, окончательно:

$$V\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right) = \frac{d^2V}{dt^2}m + gradm \cdot V\frac{dV}{dt} \qquad (33)$$

Полученное уравнение устанавливает связь одного скалярного поля (энергии) с другим скалярным полем (массы) через посредство векторного поля (скоростей) и его изменения (производные скорости). Векторная форма этого уравнения должна, как представляется, наводить на мысль об инвариантности к любым проявлениям скалярных и векторных полей. Но получено это уравнение из исследования только механической энергии и потому нет пока оснований для каких-либо обобщений. Кроме того, предполагается продолжение этой работы в части применения теоремы сложения скоростей для выявления вихревых проявлений энергии. Поэтому всякие выводы в настоящей работе признаны преждевременными.

***P.S.** Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на* **okeanov@mail.ru**