Кое-что о тяготении

Океанов Е.Н.

Все-таки, что-то с земным тяготением не так, как учили в школе. Смущает вот какая деталь. Если груз массой m 10 кг поднимается на высоту h_1 (от Земли, конечно) 10 метров, то этот груз якобы запасает потенциальную энергию U_1 (в джоулях):

$$U_1 = mgh_1 = 10 \cdot 9.81 \cdot 10 = 981$$

Энергию запасает, конечно, система (Земля-груз), а не часть системы (груз). А если этот же груз поднимается на высоту h_2 100 метров, запасается потенциальная энергия U_2:

$$U_2 = mgh_2 = 10 \cdot 9.81 \cdot 100 = 9810$$

Но силу F_t (в ньютонах) притяжения груза к Земле господин Ньютон определил законом тяготения:

$$F_t = f\frac{Mm}{L^2},$$

где M – масса Земли, f – гравитационная постоянная, L – расстояние между грузом и Землей. А это расстояние является не расстоянием от поверхности Земли до груза, а расстоянием между центрами масс и складывается из радиуса Земли R и расстояния h от поверхности Земли (расстоянием от центра масс груза до его поверхности просто следует пренебречь ввиду его сравнительной малости). Поэтому в первом случае эта сила равна F_{t1}:

$$F_{t1} = f\frac{Mm}{(R+h_1)^2},$$

а во втором случае $-F_{t2}$:

$$F_{t1} = f\frac{Mm}{(R+h_2)^2}$$

Поскольку, как известно, $M = 5.96790688155922 \cdot 10^{24}[kg]$, $R = 6370000[\mathrm{m}]$, а также $f = 6.67\mathrm{E}\text{-}11\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\right]$, постольку, как легко проверить, $F_{t1} = 98.09969[\mathrm{N}]$ и $F_{t1} = 98.09692[\mathrm{N}]$.

Разница этих сил заметна только в третьем знаке, тогда как запасаемая энергия отличается в 10 раз. Но, как ни мала разница, потенциальной энергии запасается *больше* как раз там, где сила оказывается *меньше*. То есть, если груз поднять на высоту $h_3 = 10^7 m$ (это 10 тысяч километров), то сила его притяжения будет равна всего около 1,5 ньютонов, а энергии запасется более 24 миллионов джоулей. Но стоит взять в руки какую-либо пружину, например, в спортивном динамометре, и сжать ее, то легко заметить, что ее сила возврата тем более, чем более ее сжали. Если полагать, что пружина динамометра «запасает» потенциальную энергию при ее сжатии, то запасает ее *больше* как раз там, где *больше* сила, а не наоборот.

Следовательно, тут что-то не так. Прежде всего, как представляется, не так дело обстоит с толкованием. То, что в данном случае называют потенциальной энергией, является на самом деле *работой* силы, которая определяется *произведением силы на пройденный под ее воздействием путь*. И она не «запасается» в виде «потенциальной энергии», а, напротив, затрачивается на *кинетическую энергию движения* груза и *работу усилия*. Это утверждение проще доказать на каком-нибудь примере механического осциллятора. Но анализ тяготения интересен не для этого доказательства. Надо попытаться понять, почему именно такой вид имеет закон тяготения. Поскольку в Природе все подчинено причинно-следственной мотивации явлений, постольку должны существовать причины, по которым закон тяготения принимает именно такую свою форму, а не иную. В этом заключается основная задача анализа.

Правда, анализ предстоит довольно скучный. Потребуется терпение.

1. Уточнение отдельных математических положений.

Производная *всякого* вектора $W(x,y,z)$ по параметру t есть произведение дивергенции этого вектора на производную радиус-вектора r (это некий абстрактный радиус-вектор, а не тот, что определяет центр масс «малого» тела в предварительных сведениях) по этому параметру:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\nabla W\frac{dr}{dt} \quad (1)$$

Но тогда из очевидного равенства:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dW}{dr}\frac{dr}{dt}$$

следует равенство:

$$\nabla W=\frac{dW}{dr}=\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{dW}{dr} \quad (2)$$

Производная *всякого* скаляра $U(x,y,z)$ по параметру t есть произведение градиента этого вектора на производную радиус-вектора r по этому параметру:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\nabla U\frac{dr}{dt} \quad (3)$$

Но тогда из очевидного равенства:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dU}{dr}\frac{dr}{dt}$$

следует равенство:

$$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{dU}{dr} \quad (4)$$

По определению градиент есть вектор, нормальный к поверхности уровня. Следовательно, выражение (4) представляет собой некую векторную характеристику поверхности уровня скалярного поля U. Дифференциал dU этого поля есть скаляр, поэтому в выражении (4) за векторную сущность градиента отвечает отношение:

$$\frac{1}{dr}, \quad (5)$$

которое и должно представлять собой «*вектор, нормальный к поверхности уровня*». Но *всякая* поверхность уровня (данного скалярного поля) имеет смысл только в некотором объеме V (в котором это поле существует). Мощный аппарат математики позволяет ввести этот объем в рассмотрение самым непосредственным способом:

$$\nabla U=\frac{dU}{dV}\frac{dV}{dr} \quad (6)$$

и даже более того – связать этот объем с некоторой поверхностью S:

$$\nabla U=\frac{dU}{dV}\frac{dV}{dS}\frac{dS}{dr} \quad (7)$$

Как представляется, отношение (5), кроме векторной сущности градиента, представляет собой – сугубо математически – *нелинейную операцию деления на вектор*. В рамках линейной векторной алгебры такая операция не определена. И не может быть определена именно потому, что алгебра – линейная. Следовательно, эту операцию необходимо определять, не надеясь на традиции математики. В нескольких работах на нашем сайте предпринимались различные попытки решить эту проблему. Их общей основой является инженерный метод определения эквивалентного сопротивления параллельно включенных резисторов через их проводимости. Сущность этого метода хорошо известна и, например, для трех реактивных сопротивлений jX_1, jX_2 и jX_3 их эквивалентная реактивная проводимость, как легко проверить, определяется выражением:

$$j\frac{1}{X_E} = j\frac{1}{X_1} + j\frac{1}{X_2} + j\frac{1}{X_3}$$

Действительно, их эквивалентное реактивное сопротивление jX_E выражается формулой:

$$jX_E = \frac{jX_1 \dfrac{jX_2 jX_3}{jX_2 + jX_3}}{jX_1 + \dfrac{jX_2 jX_3}{jX_2 + jX_3}} = j\frac{1}{\dfrac{1}{X_1} + \dfrac{1}{X_2} + \dfrac{1}{X_3}}$$

откуда и вытекает предыдущее выражение. Две попытки интерпретации этого инженерного правила оказались неверными. А одна [1] представляется удачной. Применительно к вектору, выраженному отношением (5), этот метод сводится к равенству:

$$\frac{1}{dr} = \frac{1}{idx + jdy + kdz} = i\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy}j + k\frac{1}{dz} \tag{8}$$

Правая часть этого равенства легко преобразуется к виду:

$$i\frac{1}{dx} + j\frac{1}{dy} + k\frac{1}{dz} = \frac{idydz + jdxdz + kdxdy}{dxdydz} \tag{9}$$

Если теперь положить:

$$idydz + jdxdz + kdxdy = dS \tag{10}$$

и

$$dV = dxdydz, \tag{11}$$

то отношение (5) принимает вид:

$$\frac{1}{dr} = \frac{dS}{dV} \tag{12}$$

Дифференциал объема в форме (11) входит в число традиционных математических обозначений и потому сомнений не вызывает. Дифференциал поверхности в форме (10) не является общеупотребительным и его надо немного пообсуждать. В частности, если выражение (8) является истинным в качестве определения нелинейной операции деления на вектор, то можно эту операцию применить к дифференциалу поверхности (вектору):

$$\frac{1}{dS} = \frac{1}{idydz + jdxdz + kdxdy} = i\frac{1}{dydz} + j\frac{1}{dxdz} + k\frac{1}{dxdy} \tag{13}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что правая часть равенства (13) принимает вид:

$$\frac{1}{dS} = \frac{dr}{dV} \tag{14}$$

Но именно такой результат и ожидается из соотношения (12). Следовательно, рассмотренное определение нелинейной операции на вектор (и полученное на основе формальных сугубо математических соотношений) можно полагать корректным и использовать в дальнейшем.

Возвращаясь к выражению (6), градиент теперь можно выразить в виде:

$$\nabla U = \frac{dU}{dV}\frac{dV}{dr} = \frac{dU}{dV}dS \tag{15}$$

и ввести понятие *локального объема* $V(x, y, z)$ как *часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью* S уровня, что весьма существенно, поскольку оказывается очевидным условие разрыва поверхности:

$$\nabla U = \infty \tag{16}$$

Выражение (15) позволяет в самом общем случае рассматривать *объемную плотность скаляра* U *как распределение его градиента по замкнутой поверхности локального объема*.

Поскольку локальный объем V является частным случаем скаляра U, постольку представляется корректным соотношение:

$$\nabla V = \frac{dV}{dr} = dS\,, \tag{17}$$

на основании которого элементарный вектор dS замкнутой поверхности S уровня оказывается градиентом локального объема V.

Обращаясь к выражению (2), дивергенцию можно выразить в виде:

$$\nabla W = \frac{dW}{dV}\frac{dV}{dr} = \frac{dW}{dV}dS \tag{18}$$

и понимать, как скалярное произведение вектора объемной плотности векторного поля W на элементарный вектор dS замкнутой поверхности локального объема.

Наконец, понимая массу m как скалярное поле, можно градиент массы представить в виде:

$$\nabla m = \frac{dm}{dr} = \frac{dm}{dV}\frac{dV}{dr} = \frac{dm}{dV}dS \tag{19}$$

и физически понимать его, как вектор линейной плотности массы.

Для всякой величины G такой, что:

$$\frac{dG}{dS} = dH \qquad \text{и} \qquad \frac{dG}{dV} = \nabla H = \frac{dH}{dr}\,, \tag{20}$$

представляется справедливым [1] равенство:

$$G = \oint_S dH dS = \oint_V \nabla H \cdot dV \tag{21}$$

Это формула Остроградского, скорректированная для замкнутой упругой поверхности.
Совокупность равенств (20) и (21) означает следующее.

Если G – скаляр, то H – вектор и G является скалярным потоком векторного поля H через замкнутую поверхность S, а дивергенция векторного поля H является объемной плотностью этого потока.

Если G – вектор, то H – скаляр и G является векторным потоком скалярного поля H через замкнутую поверхность S, а градиент скалярного поля H является вектором объемной плотности этого потока.

2. Тело в качестве локального объема.

Когда говорят «*пусть тело с массой такой-то в виде шара с радиусом таким-то*», вольно или невольно имеют в виду некий локальный [1] объем V, в котором некоторым образом распределена собственная масса m_V, а его сферическая поверхность S_V представляет собой оболочку этого локального объема в виде зафиксированной поверхности уровня. В общем случае произвольной формы тела его поверхность отличается, естественно, от сферической, но остается *фиксированной поверхностью уровня*. Фиксация поверхности уровня осуществляется, надо думать, взаимным противодействием двух векторов: вектора, пропорционального градиенту объема и направленного наружу из объема, и вектора, пропорционального градиенту массы (или энергии) и направленного в противоположную сторону. Эти градиенты можно определить, если начало системы отсчета локального пространства поместить в центр масс локального объема, когда любую точку этого локального пространства определяет радиус-вектор r_V.

Форму тела можно произвольно изменить (разрезать, расколоть или применить любой иной способ), но для этого потребуется затратить некоторую работу, что вполне понятно. Но тогда тем более должно быть понятно, что и сам факт существования данного тела в его форме обязан определенной работе, затраченной на его формирование. А всякая работа, будучи процессом, требует определенной затраты времени. Исходя из того, что *энергия является мерой работы*, сущность локального объема с распределенной в нем массой можно рассмотреть, анализируя изменение энергии E во времени, не уточняя вида энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dV}\frac{dV}{dS_V}\frac{dS_V}{dr_V}\frac{dr_V}{dt} = \nabla E\frac{dr_V}{dt} \tag{22}$$

Правая часть этого равенства определяет силу ∇E и скорость $\frac{dr_V}{dt}$, под воздействием которых находится нечто в пространстве локального объема V в точке, на которую указывает конец радиус-вектора r_V. На основании равенства (2) силу можно представить в виде:

$$\nabla E = \frac{dE}{dr_V} \tag{23}$$

и, применяя известный в математике прием замены переменной, выразить ее через массу m_V локального объема:

$$\nabla E = \frac{dE}{dm_V}\frac{dm_V}{dr_V} \tag{24}$$

Но для силы (24) справедливо и другое выражение:

$$\nabla E = \frac{dE}{dV}\frac{dV}{dr_V},$$

которое аналогично можно выразить через массу:

$$\nabla E = \frac{dE}{dm_V}\frac{dm_V}{dV}\frac{dV}{dr_V} \tag{25}$$

и тогда в его составе каждый легко узнает объемную плотность ρ_V массы:

$$\rho_V = \frac{dm_V}{dV} \tag{26}$$

Градиент массы, или линейная плотность ρ_L массы локального объема:

$$\rho_L = \frac{dm_V}{dr_V} = \nabla m_V, \tag{27}$$

как легко заметить, связана с объемной плотностью массы соотношением:

$$\nabla m_V = \rho_L = \rho_V dS_V \tag{28}$$

Остается теперь уяснить физический смысл скалярного множителя D_V:

$$D_V = \frac{dE}{dm_V} \tag{29}$$

в составе силы (24). Понятно, что это – энергия, приходящаяся на единицу массы локального объема. Но рассматриваемое изменение энергии по своей сущности есть процесс передачи энергии от некоторого ее источника к потребителю, коим является формируемое тело в виде локального объема. То есть, это процесс уменьшения энергии источника, который можно полагать диссипацией энергии. На этом основании множитель (29) приобретает физический смысл коэффициента диссипации. Он характеризует поглощение энергии источника массой формируемого локального объема. Или преобразование энергии в массу. Градиент энергии, или механическую силу теперь можно представить в виде:

$$\nabla E = D_V \rho_V dS_V \tag{30}$$

Теперь пришла пора вникнуть в природу силы глубже. Пусть вектор MM момента массы локального объема определен произведением:

$$MM = m_V r_V \tag{31}$$

Тогда его производная по времени является вектором импульса силы $p(t)$ и имеет вид:

$$p(t) = \frac{dMM}{dt} = m_V \frac{dr_V}{dt} + \frac{dm_V}{dt} r_V \tag{32}$$

А сила $F_V(t)$ в общем случае является производной импульса силы или второй производной момента массы:

$$F_V = \frac{dp}{dt} = m_V \frac{d^2 r_V}{dt^2} + 2\frac{dm_V}{dt}\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d^2 m_V}{dt^2}$$

Поэтому градиент энергии принимает вид:

$$\nabla E = m_V \frac{d^2 r_V}{dt^2} + 2\frac{dm_V}{dt}\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d^2 m_V}{dt^2} \tag{33}$$

Здесь не должно смущать изменение массы во времени, поскольку масса локального объема становится неизменной во времени лишь по окончании формирования этого локального объема. Опять применяя замену переменной, выражение (33) легко привести к виду:

$$\nabla E = \frac{dm_V}{dV}\frac{dr_V}{dt}\left[m_V \frac{d}{m_V}\left(\frac{dr_V}{dt}\right) + 2\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d}{dm_V}\left(\frac{dm_V}{dt}\right)\right]\frac{dV}{dr_V} \tag{34}$$

откуда следует выражение объемной плотности энергии:

$$\frac{dE}{dV} = \frac{dm_V}{dV}\frac{dr_V}{dt}\left[m_V \frac{d}{m_V}\left(\frac{dr_V}{dt}\right) + 2\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d}{dm_V}\left(\frac{dm_V}{dt}\right)\right], \tag{35}$$

а уже отсюда следует выражение коэффициента диссипации:

$$D_V = \frac{dr_V}{dt}\left[m_V \frac{d}{m_V}\left(\frac{dr_V}{dt}\right) + 2\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d}{dm_V}\left(\frac{dm_V}{dt}\right)\right] \tag{36}$$

Уравнение (34) полезно выразить через поверхность:

$$\frac{dE}{dV}dS_V = \frac{dm_V}{dV}\frac{dr_V}{dt}\left[m_V \frac{d}{m_V}\left(\frac{dr_V}{dt}\right) + 2\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d}{dm_V}\left(\frac{dm_V}{dt}\right)\right]dS_V \tag{37}$$

Тогда становится очевидным, что объемная плотность энергии имеет размерность механической силы, приходящейся на единицу поверхности (давления). Правую часть уравнения (37) можно рассматривать, как силу, воздействующую на поверхность уровня таким образом, чтобы локальный объем увеличивался. А чтобы зафиксировать поверхность уровня на своем данном уровне, этой силе должна противостоять некая иная сила F_V, равная по модулю, но направленная в противоположную сторону. Ясно, что это должна быть упругая сила деформации поверхности уровня, которая формирует механическое напряжение σ_V этой поверхности:

$$dF_V = \sigma_V dS_V \tag{38}$$

Поэтому представляется очевидным условие фиксации поверхности уровня:

$$\frac{dE}{dV} = -\sigma_V = \frac{dm_V}{dV}\frac{dr_V}{dt}\left[m_V \frac{d}{m_V}\left(\frac{dr_V}{dt}\right) + 2\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d}{dm_V}\left(\frac{dm_V}{dt}\right)\right] \tag{39}$$

На основании равенства (17) дифференциал локального объема можно представить в виде:

$$dV = dS_V dr_V$$

и подставить в левую часть условия (39):

$$\frac{dE}{dS_V dr_V} = -\sigma_V \tag{40}$$

Выделяя здесь поверхностную плотность энергии:

$$dH = \frac{dE}{dS_V} = -\sigma_V dr_V \, , \tag{41}$$

очевидный интеграл:

$$H = -\int \sigma_V dr_V \tag{42}$$

приходится понимать, как вектор поверхностного натяжения поверхности уровня. Но отсюда следует равенство:

$$\nabla H = \frac{dH}{dr_V} = -\sigma_V \tag{43}$$

и тогда, в соответствии с равенством (21), энергию, израсходованную на образование локального объема V с массой m_V, определяет равенство:

$$E = \oint_S dHdS = \oint_V \nabla H \cdot dV \tag{44}$$

На основании равенств (42) и (43) общее выражение (44) принимает конкретный вид:

$$E = -\oint_S \sigma_V dr_V dS_V = -\oint_V \sigma_V \cdot dV \tag{45}$$

Поскольку уравнение (22) выражает мощность $P(t)$ процесса такого образования, который начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент времени t_1, постольку энергия (45) представляет собой площадь под кривой $P(t)$ на интервале времени:

$$T = t_1 - t_0$$

Это как раз тот интервал, который необходим для формирования тела в виде локального объема V. Внешняя оболочка этого тела описывается радиус-вектором $r_V(t_1)$. График мощности представлен на рис. 2 и иллюстрирует, в сущности, процесс диссипации энергии:

$$E = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt = E(t_1) - E(t_0) \tag{46}$$

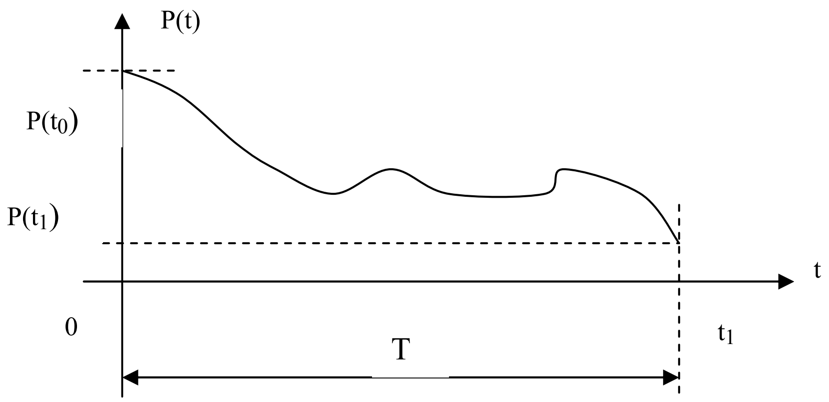

Рис.2. Процесс расходования энергии на формирование локального объема.

Это, вообще говоря, означает, что характеристики локального объема содержат всю информацию о процессе его формирования. И, зная геометрию локального объема, его объемную плотность массы и коэффициент диссипации, можно – при достаточном трудолюбии – выяснить всю историю его формирования в прошлом. И научиться формировать новые локальные объемы с заданными свойствами в будущем.

Наличие силы (33) внутри локального объема, связанной с массой m_V, позволяет формально рассматривать уравнение движения этой массы:

$$\nabla E + R_V \frac{dr_V}{dt} + K_V r_V = 0\,, \tag{47}$$

где R_V и K_V – характеристики механического сопротивления и упругости собственного пространства локального объема. Правая часть здесь равна нулю в силу отсутствия внешних сил. Подстановка в него силы (33) преобразует это уравнение к виду:

$$m_V \frac{d^2 r_V}{dt^2} + 2\frac{dm_V}{dt}\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d^2 m_V}{dt^2} + R_V \frac{dr_V}{dt} + K_V r_V = 0 \tag{48}$$

Уравнение (47) называют уравнением без правой части, подчеркивая этим, что на систему сил в левой части воздействие внешних сил отсутствует. Между тем, сущность тяготения заключается в том, что локальный объем, благодаря своей массе, сам оказывает воздействие на окружение силой, пропорциональной ускорению, и масса оказывается коэффициентом пропорциональности. Следовательно, чтобы уравнение (48) адекватно отображало сущность тяготения, такую силу надо из левой части перевести в правую часть в виде ***как бы*** внешнего воздействия, а остальные силы в левой части полагать внутренними силами противоборства сил, обусловленных изменением энергии и сил, обусловленных собственными свойствами пространства внутри локального объема. Тогда уравнение (48) преобразуется в два уравнения. Одно из них – выражение силы F_A воздействия на внешнее окружение:

$$F_A = -m_V \frac{d^2 r_V}{dt^2} \tag{49}$$

Другое уравнение выражает баланс сил внутри локального объема:

$$2\frac{dm_V}{dt}\frac{dr_V}{dt} + r_V \frac{d^2 m_V}{dt^2} + R_V \frac{dr_V}{dt} + K_V r_V = 0 \tag{50}$$

Баланс сил позволяет получить собственные характеристики пространства локального объема:

$$R_V = -2\frac{dm_V}{dt} \qquad \text{и} \qquad K_V = -\frac{d^2 m_V}{dt^2}$$

Можно показать, что их векторная интерпретация имеет вид:

$$R_V = -2\nabla m_V \frac{dr_V}{dt} \qquad \text{и} \qquad K_V = -\Delta m_V \left(\frac{dr_V}{dt}\right)^2 - \nabla m_V \nabla\left(\frac{dr_V}{dt}\right) \tag{51}$$

В механике [2] более употребительными являются коэффициент h сопротивления и коэффициент k^2 возврата. Очевидно, что они, соответственно, равны:

$$h = -\frac{1}{m_V}\frac{dm_V}{dt} \qquad \text{и} \qquad k^2 = -\frac{1}{m_V}\frac{d^2 m_V}{dt^2}$$

Примечательно, что коэффициент h механического сопротивления по своей сущности является изменчивостью массы первого порядка [3], а коэффициент k^2 возврата – произведением этой изменчивости массы на ее изменчивость второго порядка.

Полученные характеристики представляются существенными, поскольку понятие локального объема без особых трудностей обобщается на любое физическое пространство. Естественно, под *физическим* (в механическом смысле) пространством понимается *пространство, в котором некоторым образом распределена масса*. Тогда уравнением произвольного собственно физического пространства с произвольным радиус-вектором $r(t)$ следует полагать уравнение:

$$2h\frac{dr}{dt} + k^2 r = 0 \tag{52}$$

Из этого уравнения определяется скорость в пространстве:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{k^2}{2h}r \tag{53}$$

Полезно ввести обозначение:

$$b(t) = \frac{k^2}{2h}$$

Тогда ускорение в пространстве:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -b\frac{dr}{dt} - \frac{db}{dt}r$$

позволяет определить *экстремальную* скорость c в пространстве очевидным выражением:

$$c = -\frac{1}{b}\frac{db}{dt}r = const \tag{54}$$

Из этого выражения напрашивается весьма важный, как представляется, вывод: *метрика всякого физического пространства определяется исключительно свойствами* (51) *этого пространства*.

Итак, сила (49), являясь, в сущности, частью внутренних сил локального объема, за его пределами выступает в качестве силовой характеристики этого локального объема. Это означает, что всякий ***локальный объем является источником внешнего центрального силового поля, которое и является причиной тяготения масс***. Отрицательный знак правой части уравнения (49) показывает, что локальный объем обладает *свойством поглощения* внешней массы. Именно за счет этого своего силового поля локальный объем сохраняет свою форму по окончании воздействия формирующей его энергии. Сформированный когда-то, локальный объем «запоминает» напряжение своей оболочки (и всех внутренних оболочек, устроенных как у репчатого лука) и в любое время готов применить ее силу. Так и сжатая пружина «запоминает» напряжение и всегда готова к силовому воздействию при подходящих условиях. Следовательно, во внешней среде всякий локальный объем характеризуется своей силой F_A воздействия на окружающую среду. Но эта сила действует за пределами локального объема, а радиус-вектор r_V определен только в пространстве локального объема. Поэтому радиус-вектор r_V в выражении (49) фактически должен быть *трансформирован* в новый вектор u, который по направлению является продолжением радиус-вектора r_V во внешней среде, но количественно отличается от него. Проблема адекватной трансформации внутреннего радиус-вектора r_V во внешний вектор u представляется ключевой для уяснения сущности закона тяготения.

На флоте у подводников есть хорошая и очень важная команда: «Осмотреться в отсеках». Применительно к настоящему исследованию эту команду следует интерпретировать так: «Осмотреться в понятиях». Так вот, если энергию понимать, как меру работы, а работу – как меру движения, то напрашивается мысль о более фундаментальной количественной характеристике движения, нежели эти перечисленные. Из всех возможных количественных характеристик движения наиболее очевидной, естественной и наглядной характеристикой является пройденный путь r, как *результат* движения. Но тогда произведение результата движения на меру движения представляется уже не характеристикой движения, а собственно *движением*. Следовательно, в общем случае таким именно образом можно ввести понятие вектора момента энергии ME:

$$ME = E(r)r, \tag{55}$$

где r – радиус-вектор пространства, в котором энергия проявляет себя. Это понятие, как представляется, содержит в себе и причину движения, и следствие этой причины и результат движения. Если, вдруг, физике потребуется математическое определение собственно движения, то лучшего, нежели момент энергии, она не найдет. Это понятие, как и момент массы, представляется одним из фундаментальных, поскольку любые известные характеристики движения являются производными момента энергии. Действительно, в силу $r = r(t)$, изменение во времени момента энергии имеет вид:

$$\frac{dME}{dt} = \frac{dME}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dE}{dt}r + E\frac{dr}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt}r + E\frac{dr}{dt} = (r\nabla E + E)\frac{dr}{dt} \qquad (56)$$

Энергия $E(r)$ оказывается производным понятием, причем, в буквальном смысле:

$$E(r) = \frac{dME}{dr} = \nabla ME = \frac{dE}{dr}r + E = A(r) + E(r)\frac{dr}{dr} \qquad (57)$$

так, что и работа $A(r)$:

$$A(r) = \frac{dE}{dr}r = rF(r) = r\nabla E\,, \qquad (58)$$

выраженная через силу $F(r)$, нашла здесь свое математическое и физическое место в виде скаляра момента силы. То есть, результат движения (путь) обусловлен причиной (силой), следствием которой является произведенная работа. Легко заметить, что сила является второй производной момента энергии по протяженности (по радиус-вектору) и она же является второй производной момента массы по времени. Это обстоятельство лишний раз показывает, что моменты массы и энергии являются фундаментальными механическими характеристиками физических тел и явлений. Но надо остановиться на одной тонкости в этих формальных выражениях.

Из выражения (56) следует, что энергия $E(r)$ выступает, очевидно, в качестве *дивергенции* вектора момента энергии ME и включает в себя работу $A(r)$ в качестве одного из слагаемых. Второе слагаемое требует особого внимания, поскольку, как это следует из выражения (57), оно связано с дивергенцией радиус-вектора r, которая намеренно представлена странным, на первый взгляд, отношением $\frac{dr}{dr}$. Дело здесь в том, что радиус-вектор r порождает центральное векторное поле, дивергенция которого, по утверждению математиков [4, стр. 542], равна:

$$\nabla r = 3 \qquad (59)$$

И действительно, это представляется очевидным из равенства:

$$\nabla r = i\frac{\partial r}{dx} + j\frac{\partial r}{dy} + k\frac{\partial r}{dz} = \left(i\frac{\partial}{dx} + j\frac{\partial}{dy} + k\frac{\partial}{dz}\right)(ix + ky + kz) = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (60)$$

Но, в соответствии с равенством (2), не менее очевидным оказывается равенство:

$$\nabla r = \frac{dr}{dr} = 1\,, \qquad (61)$$

которое и нашло отражение в уравнении (57).

Надо либо признать какое-то из этих очевидных равенств неверным, непременно *обосновав его некорректность*, либо понять причину удивительного противоречия, чтобы не формально, а по существу и правильно пользоваться понятием дивергенции.

Физика – это объективные явления Природы, одно из которых – Человек Разумный – формирует субъективное мнение об остальных явлениях Природы, впрочем, и о себе тоже. Математика – это компактный язык высокой организации, на котором Человек Разумный формирует свое субъективное мнение. Поэтому, при всем уважении к математике, приоритет в познании Природы надо отдать физике. Все-таки, математика – всего лишь инструмент познания.

По своему физическому смыслу дивергенция является линейной плотностью векторного поля в направлении ортов, коими определен каждый вектор поля. Следовательно, *каждое* слагаемое дивергенции является *специфической* информацией *о поведении вектора* в направлении *каждого* соответствующего своего *орта*. Этой информацией можно разумно воспользоваться для изучения этого вектора. Число, равное сумме этих информаций, свойством *специфичности* не обладает и потому разумно им воспользоваться затруднительно, по крайней мере. Некоторые жены посылают своих мужей в магазин за продуктами. Если жена просит мужа купить 1 килограмм печенья, 1 килограмм варенья и 1 килограмм ореховых трубочек, то разумно полагать, что она ждет гостей на вечерний чай. А муж, по рассеянности, или крайней занятости, забыл, что именно надо купить, и купил 3 килограмма муки. Времени на приготовление пирогов не оказалось и разумно устроить чайный вечер не удалось. Другими словами, несмотря на скалярный характер дивергенции, ее составляющие складывать в сумму можно только тогда, когда поведение вектора не представляет интереса. Но тогда для чего нужна дивергенция вообще? Поэтому к дивергенции следует относиться как к тройке самостоятельных характеристик, знаки которых выражают не арифметическую операцию сложения (вычитания), а являются принадлежностью каждого числа этой тройки. Приходится забраковать и равенство (59), и равенство (61), поскольку *дивергенция не сводится к одному числу*. Поэтому выражение (57) имеет смысл только в виде:

$$E(r) = \nabla ME = A(r) + E(r)\nabla r = r\nabla E + E(r)\nabla r \qquad (62)$$

В процессе формирования локального объема его вектор момента энергии является функцией изменяющегося радиус-вектора. У сформированного локального объема его вектор ME_V момента энергии становится константой:

$$ME_V = E_V r_{VMAX} = const \qquad (63)$$

Пусть всякая точка внешнего пространства, в котором находится сформированный (когда-то) локальный объем, определяется относительно центра масс этого локального объема радиус-вектором l:

$$l = r_V + u$$

То обстоятельство, что часть своей внутренней силы F_V локальный объем делегирует во внешнее пространство в виде силы F_A воздействия на окружения, указывает на наличие в пространстве энергии $E(l)$ этого воздействия, момент которой, очевидно, *обязан* быть равным моменту (63):

$$lE(l) = ME_V = const\,, \qquad (64)$$

откуда следует выражение внешней энергии локального объема:

$$E(l) = \frac{ME_V}{l} \qquad (65)$$

Но тогда внешняя сила $F(l)$ локального объема, будучи градиентом энергии, определяется очевидным выражением:

$$\nabla E(l) = \frac{dE}{dl} = F(l) = -\frac{ME_V}{l^2}\,, \qquad (66)$$

а поскольку делегированная локальным объемом сила F_A является именно силой (66), постольку равенство:

$$F_A = -m_V \frac{d^2 r_V}{dt^2} = -\frac{ME_V}{l^2} = F(l) \qquad (67)$$

представляет собой уравнение трансформации части внутренней силы локального объема во внешнее пространство, следствием которой является трансформация радиус-вектора r_V в радиус-вектор l. Понятно, что отрицательный знак указывает направление силы к центру масс локального объема.

Вот как. Оказывается, обычное ускорение внутри локального объема во внешнюю среду трансформируется именно в виде выражения, правая часть которого не отличается от закона тяготения. Но это должно означать, что настоящее исследование проходит по верному пути. Кстати, существенно, что векторный характер правой части этого выражения самым естественным образом определяется вектором момента энергии и, отнюдь, не требует нелепого искусственного домножения на некий вектор с последующим делением на его модуль. В математике часто применяют прием умножения и деления на одно и то же число. Но вектор и его модуль – существенно различные математические объекты, и потому якобы формальная процедура умножения на вектор и деления на его модуль не может быть оправдана ни под каким видом. А именно таким образом закон тяготения Ньютона (кстати, и закон Кулона тоже) «исправлен» [5] в справочной литературе, *чтобы укладывался* в теорию поля. Что характерно: теория поля основана на *линейной* векторной алгебре, тогда как рассмотренная трансформация векторов представляется существенно *нелинейной*. А это означает, что для более глубокого исследования тонкостей тяготения и электричества надо осваивать методы нелинейной математики.

Теперь надо уточнить все-таки значение момента энергии (63) сформированного локального объема. Должно быть понятно, что свое минимальное значение радиус-вектор l принимает на поверхности локального объема и это значение равно:

$$l_{MIN} = r_{VMAX}$$

Соответственно, сила $F(l)$ свое максимальное значение имеет на этой же поверхности и это значение равно:

$$F_{MAX}(l) = -\frac{ME_V}{r_{VMAX}^2}$$

Из сравнения с ньютоновским законом тяготения константа в числителе должна быть равна:

$$ME_V = fm_1 m_2$$

Но рассматривается лишь один локальный объем с массой m_V и потому эта константа *обязана* принимать значение:

$$ME_V = fm_V^2$$

Поскольку момент энергии есть вектор, постольку *универсальная константа f тяготения является вектором*. На этом основании внешняя сила $F(l)$ воздействия локального объема на окружение принимает вид *вектора*:

$$F(l) = -\frac{fm_V^2}{l^2},$$

а ускорение в силовом поле локального объема отсюда определяется *вектором*:

$$g(l) = -\frac{fm_V}{l^2}$$

Универсальная константа f тяготения, как известно, равна: $f = 6.67\text{E-}11\frac{\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$.

Земля в качестве локального объема имеет следующие характеристики:

- средний радиус $R_E = 6370000m$;
- масса $M_E = 5.96790688155922\text{E}+24\text{kg}$.

Легко убедиться подстановкой, что ускорение на поверхности Земли равно: $g_E = 9.81\frac{kgm}{s^2}$.

Луна в качестве локального объема имеет следующие характеристики:

- радиус $R_M = 1738000\text{m}$;
- масса $M_M = 0.0735\text{E}+24\text{kg}$.

Легко убедиться подстановкой, что ускорение на поверхности Луны равно: $g_M = 1.623 \frac{kgm}{s^2}$.

Отношение $\frac{g_E}{g_M} = 6.044$

Учитывая, что земное ускорение в функции радиус-вектора l принимает вид:

$$g_E(l) = -\frac{fM_E}{l^2},$$

всякое тело с массой $m << M_E$, попадая в силовое поле Земли, будет притягиваться к ней с силой:

$$F_t = -f\frac{M_E m}{l^2},$$

каковая и определяется законом тяготения в редакции Ньютона, а не справочника по физике.

Выявленные причины тяготения не содержат даже намека на потенциальную энергию. Но, поскольку этот термин очень уж привычен, можно им обозначить работу, затраченную на формирование локального объема. Применительно к земному тяготению это работа, затраченная на формирование Земли, и работа, затраченная на формирование тела, которое поднимается над Землей. Поэтому потенциальная энергия (если ее так называть) системы Земля-тело максимальна при минимальном расстоянии между Землей и телом. Следовательно, когда тело поднимается над Землей, потенциальная энергия становится *меньше* (там, где и сила притяжения *меньше*). Работа, затраченная на подъем тела, *уменьшает* так называемую потенциальную энергию. По мере возвращения тела на Землю (там сила притяжения *больше*) потенциальная энергия становится *больше* и восстанавливается до максимальной. Все, как и у пружины. Теперь нет противоречий.

На этом можно закончить настоящее исследование, отметив существенные его моменты.

1. Изюминка тяготения заключена в трансформации векторов. Но тогда и в законе Кулона заключена аналогичная изюминка.
2. Идея локальных объемов оказывается более плодотворной, нежели это предполагалось в специальном их исследовании.
3. Определение нелинейной операции деления на вектор представляется не только корректным, но и конструктивным.

Литература.

1. ***Океанов Е.Н.*** Энергия и локальные объемы. Интернет, www.nworld.da.ru**.**
2. ***Смирнов В.И.*** Курс высшей математики. Том второй. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математческой литературы. М.,1965, 606 с.
3. ***Океанов Е.Н.*** От математики линейной к математике нелинейной. Интернет, www.nworld.da.ru**.**
4. ***Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.*** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М., 1967.
5. ***Яворский Б.М. и Детлаф А.А.*** Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М., 1974.