О функции Лагранжа

Океанов Е.Н.

В работе “Об энергии движущегося тела” математически доказан (и пока не опровергнут) баланс механической энергии, который сводится к утверждению: работа силы равна сумме кинетической энергии и работы усилия. Но тем самым доказывается, что кинетическая энергия равна потенциальной лишь в частном случае постоянного ускорения (когда отсутствует усилие), а это обстоятельство вынуждает присмотреться внимательнее к функции Лагранжа, откуда и вытекают понятия потенциальной и кинетической энергий как слагаемых полной энергии. В работе « Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1.:- Наука, Гл. ред. Физ.-мат. литературы, М., 1969» в главе «Принцип наименьшего действия» под действием понимается интеграл:

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q, q`, t)dt, \qquad (1)$$

где $L(q, q`, t)$ - функция Лагранжа, $q$ - набор обобщенных координат, $q`$ - набор обобщенных скоростей, t - время. Сущность упомянутого принципа состоит в минимизации этого интеграла. Если бесконечно малые приращения координат обозначить как δq, а бесконечно малые приращения скоростей – как $\delta q`$, то условие минимума действия можно записать в виде:

$$\int_{t1}^{t2} L(q+\delta q, q`+\delta q`, t)dt - \int_{t1}^{t2} L(q, q`, t)dt = 0 \qquad (2)$$

При этом в работе утверждается буквально следующее: «Разложение этой разности по степеням δq и $\delta q`$ (в подынтегральном выражении) начинается с первого порядка» и далее производится варьирование:

$$\int_{t1}^{t2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q`}\delta q` \right) dt = 0 \qquad (3)$$

Здесь надо бы остановиться и перевести дух. Для того, во-первых, чтобы представить указанное разложение:

$$\begin{aligned} L(q+\delta q, q`+\delta q`, t) - L(q, q`, t) &= \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q`}\delta q` \right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial q^2}(\delta q)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial q`}\delta q \delta q` + \frac{\partial^2 L}{\partial q`^2}(\delta q`)^2 \right\} + \ldots = \\ &= \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q`}\delta q` \right\} + R \end{aligned}, \qquad (4)$$

где R - сумма всех членов разложения порядка 2 и более. Во-вторых, для существенного, как представляется, замечания о параметре. Суть его сводится к следующему. Пусть некая характеристика U в системе координат X, Y, Z является функцией этих координат:

$$U = U(x, y, z),$$

а сами координаты являются функциями параметра t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Тогда производная функции U по параметру t принимает вид:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (5)$$

Пусть эта же характеристика U в системе координат X, Y, Z, T является функцией этих координат:

$$U = U(x, y, z, t),$$

а сами координаты являются функциями координаты T:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t = t$$

Тогда производная функции U по координате T принимает вид:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \qquad (6)$$

Как легко заметить, выражение (6) отличается от выражения (5) дополнительным слагаемым в виде частной производной функции U по координате T. Это означает, что независимая переменная в статусе параметра порождает одну функцию, а в статусе координаты – совершенно иную функцию даже для одной и той же характеристики, описываемой этими функциями. Поэтому введение параметра в число независимых переменных по принципу «каши маслом не испортишь» представляется недопустимым, поскольку изменяет статус этой переменной и подменяет поставленную для решения задачу совершенно другой задачей. Это обстоятельство существенно, в том числе и для знаменитого «четырехмерного пространства-времени». В рассматриваемом же случае время выступает в качестве параметра, а не координаты, и потому в приведенном разложении отсутствует частная производная функции Лагранжа по времени (тогда как формально она должна была бы быть, поскольку в источнике время непосредственно входит в число независимых переменных этой функции). Отсутствует она и в результате (3) варьирования по источнику, что и дает основание полагать время параметром, а не координатой.

Переведя таким образом дух, можно заметить, что именно из выражения (3) выводится дифференциальное уравнение Лагранжа, решение которого в источнике и приводит не к балансу энергии, а к полной энергии в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Но приводит только лишь при неявном условии $R = 0$, которое скрыто в цитируемой из источника фразе. Однако это условие превращает общую задачу в частный случай. Как раз в тот частный случай постоянного ускорения, при котором усилие отсутствует. В параграфе 5 цитируемой работы функция Лагранжа для системы частиц в этом частном случае имеет вид:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, ...)$$

а в общем случае должна иметь вид:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + f(R) - U(r_1, r_2, ...),$$

где $f(R)$ - функция, учитывающая влияние нелинейных составляющих упоминаемого разложения. И тогда очевидным условием минимальности действия становится условие $L = 0$, при котором:

$$U(r_1, r_2, ...) = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + f(R)$$

Но одномерный случай баланса энергии (из работы “Об энергии движущегося тела”) как раз такой вид и имеет:

$$F \cdot x - F_0 \cdot x_0 = \frac{m}{2} v^2 - \frac{m}{2} v_0^2 + \int_{t1}^{t2} \frac{dF}{dt} \cdot x \cdot dt,$$

а это позволяет заключить, что в данном одномерном случае функция:

$$f(R) = \int_{t1}^{t2} \frac{dF}{dt} \cdot x \cdot dt$$

и является работой усилия $\frac{dF}{dt}$. Усилие – это производная силы по времени.

P.S. *Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на* ***okeanov@mail.ru***