Мультипликативная форма математического представления сигналов

Океанов Е.Н.

1. Состояние проблемы

Спектральное представление сигналов, аддитивное по сути своей, является мощным линейным средством исследования и развивается уже более столетия, показав за это время исключительную продуктивность. Но это не единственно возможная форма представления сигналов. Оказалось, что мультипликативная форма, нелинейная по своей сущности, позволяет выявить свойства сигналов, не очевидные в линейной интерпретации. Оба представления можно рассматривать, как два различных взгляда на один и тот же сигнал под разными углами зрения. Под углом зрения на линейной основе сигнал принимает форму трехмерного рельефа в частотной области, а под углом зрения на нелинейной основе сигнал принимает форму пространственной линии во временной области. Такое различие взглядов оказывается полезным для практических целей, поскольку выявляет скрытые резервы в свойствах сигналов для новых технологий.

Профессиональные математики часто упрекают профессиональных инженеров и разработчиков в пренебрежении к математической строгости в их математических выкладках. Профессиональные инженеры и разработчики, в свою очередь, часто упрекают профессиональных математиков в излишнем педантизме по части применимости тех или иных математических соотношений к разным практическим задачам. Чтобы несколько уменьшить число подобных недоразумений в данном случае, здесь рассматриваются реальные физические сигналы, математической моделью которых всегда является функция времени на ограниченном интервале с ограниченным спектром. Если в микрофон, подключенный к осциллографу через усилитель с полосой пропускания от 300 до 3400 Гц, произнести фразу «реальный физический сигнал», то на экране осциллографа именно такая функция времени и будет вычерчена.

1.1. Объективная информативная избыточность сигналов.

Предложенная мультипликативная форма [1] (см. литература) представления сигналов является, в сущности, частным случаем интерпретации сигнала как вектора, длина которого определяется его модулем $A(t)$, а направление – фазовым углом $\Psi(t)$. При этом сигнал в виде функции времени $S(t)$ можно рассматривать, как проекцию указанного вектора на плоскость $S,0,T$:

$$S(t) = A(t)\cdot\cos\Psi(t)\,, \qquad (1)$$

что соответствует действительной части аналитического сигнала:

$$Z(t) = A(t)\cdot e^{j\cdot\Psi(t)}, \qquad (2)$$

математически определяющего упомянутый вектор на комплексной плоскости.

Предложение мультипликативной формы стало результатом поиска альтернативы спектральному представлению (аддитивной форме) сигналов с целью преодоления такого недостатка спектрального представления, как противоречие между быстродействием и точностью. Аддитивная форма представления сигналов имеет вид:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[B_i\cdot\cos(i\cdot\varpi_1\cdot t) + C_i\cdot\sin(i\cdot\varpi_1\cdot t)\right], \qquad (3)$$

где: B_i и C_i - коэффициенты разложения Фурье, $\varpi_i = 2\cdot\pi\cdot f_1$ - основная круговая частота сигнала, f_1 - частота первой гармоники сигнала. Здесь коэффициенты разложения Фурье в качестве информативных признаков сигнала являются числами, выражающими соотношение между гармониками, и, следовательно, имеют математическое содержание, но лишены физического содержания. Поэтому разложение сигнала на гармонические составляющие требует вычисления этих коэффициентов, которое и составляет сущность преобразования Фурье. Процедура же их вычисления тем более продолжительна, чем большую точность требуется получить от разложения. Бесконечный верхний предел суммы в выражении (3) указывает, что точное разложение достигается лишь при бесконечной продолжительности вычислений и практически недостижимо. Непосредственно из выражения (1) следует, что разложение сигнала на мультипликативные составляющие $A(t)$ и $\cos\Psi(t)$ не связано с вычислением каких-либо коэффициентов и может быть получено непосредственно из сигнала в виде самостоятельных сигналов с помощью соответствующего нелинейного преобразования сигнала (например, [2]), причем, точно и мгновенно. Последнее и определило практический интерес к проблеме нелинейной обработки сигналов.

Если в фазовом угле $\Psi(t)$ выделить его линейную во времени составляющую:

$$\Psi(t) = \varpi_0 \cdot t + \phi(t),$$

где ϖ_0 - средняя круговая частота спектра сигнала, а $\phi(t)$ - нелинейная составляющая фазы в качестве приращения линейной составляющей, то выражение (1) принимает вид:

$$S(t) = A(t) \cdot \cos[\varpi_0 \cdot t + \phi(t)], \qquad (4)$$

указывающий на симметричный относительно средней частоты мгновенный спектр сигнала, а это означает, что всякий сигнал всегда имеет двукратную объективную информативную избыточность. Вывод этот очень важен, хотя и может показаться туманным. В цифровой технике термин «избыточность» применяют к кодам, когда алфавит кода искусственно расширяют для организации обнаружения и исправления ошибок в кодовых комбинациях, используемых для кодирования информации, за счет кодовых комбинаций, не используемых для кодирования (служебных). Такая избыточность не является собственным свойством (цифрового) сигнала, но «назначается» ему субъектом и потому здесь называется субъективной избыточностью. Избыточность объективная принципиально отличается от кодовой избыточности и это отличие выявляет нижеследующий анализ.

На основании известных формул Эйлера сигнал (4) может быть выражен через его аналитическую и сопряженную с ней функции:

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot A(t) \cdot e^{j \cdot \Psi(t)} + \frac{1}{2} \cdot A(t) \cdot e^{-j \cdot \Psi(t)} \qquad (5)$$

Применяя интеграл Фурье для определения спектральной плотности сигнала (5), заданного на интервале времени T:

$$SP(j\varpi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{j \cdot \Psi(t)} \cdot e^{-j \cdot \varpi \cdot t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{-j \cdot \Psi(t)} \cdot e^{-j \cdot \varpi \cdot t} \cdot dt$$

и учитывая структуру фазового угла, спектральную плотность можно выразить через среднюю частоту спектра:

$$SP(j\varpi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{j \cdot \phi(t)} \cdot e^{-j \cdot (\varpi - \varpi_0) \cdot t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{-j \cdot \phi(t)} \cdot e^{-j \cdot (\varpi + \varpi_0) \cdot t} \cdot dt$$

Поскольку частота ϖ_0 является средней частотой спектра, постольку можно говорить о спектре слева от средней частоты и спектре справа от средней частоты. Текущую частоту слева от средней удобно выразить разностью $\Omega = \varpi - \varpi_o$ и тогда спектральная плотность принимает вид:

$$SP(j\varpi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{-j \cdot [\Omega \cdot t - \phi(t)]} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \int_0^T A(t) \cdot e^{-j \cdot [(\Omega + 2 \cdot \varpi_0) \cdot t + \phi(t)]} \cdot dt, \qquad (6)$$

в котором первое слагаемое выражает спектр модуля сигнала, сдвигающегося во времени по оси частот влево от средней частоты под воздействием нелинейной составляющей фазы, а второе слагаемое выражает спектр модуля, сдвигающийся симметрично вправо от средней частоты. Другими словами, спектр всякого сигнала состоит из двух симметричных боковых полос, каждая из которых вполне идентифицируется такими признаками сигнала, как его модуль $A(t)$ и приращение фазы $\phi(t)$. Средняя частота ϖ_0 лишь фиксирует спектр сигнала в определенном месте частотной оси, но признаком идентификации сигнала служить не может.

Таким образом, модуль и приращение фазы можно считать собственными объективными информативными признаками сигнала и по той причине, что они содержатся как в одной боковой полосе его спектра, так и в другой, объективная информативность сигнала - как мера содержания в нем информативных признаков – оказывается удвоенной. Это же свойство сигнала обнаруживает и анализ выражения (1) с учетом структуры фазы:

$$S(t) = A(t) \cdot \cos\varpi_0 \cdot t \cdot \cos\phi(t) - A(t) \cdot \sin\varpi_0 \cdot t \cdot \sin\phi(t), \qquad (7)$$

где величину $U(t) = A(t) \cdot \cos\phi(t)$ можно с полным правом назвать информативной функцией сигнала (1), поскольку она определяется исключительно информативными признаками. сигнала. Ее гильбертова трансформанта $V(t) = A(t) \cdot \sin\phi(t)$ также определяется исключительно информативными признаками сигнала (1) и отличается от функции $U(t)$ одинаковым поворотом всех спектральных составляющих на угол $\pi/2$. С учетом этих обозначений выражение (7) принимает вид:

$$S(t) = U(t) \cdot \cos\varpi_0 \cdot t - V(t) \cdot \sin\varpi_0 \cdot t \qquad (8)$$

Таким образом, оба слагаемых в правой части выражения (8) содержат одинаковые информативные признаки, подтверждая двукратную информативную избыточность произвольного сигнала. Это означает теоретическую возможность искусственного уменьшения вдвое полосы частот спектра сигнала без разрушения его информативных признаков, т.е. без ущерба информации в сигнале. Практическая реализация такой возможности позволила бы вдвое увеличить производительность всех существующих каналов связи. Но, не менее важно и другое: используя в качестве модуля и фазы любую практически полезную информацию, можно синтезировать [1] сигналы, объективные информативные признаки которых одновременно являются и субъективными информативными признаками, причем выбор различных средних частот спектра позволяет синтезировать различные сигналы с одинаковой информативностью. А это открывает уникальные перспективы как для борьбы с помехами, так и для повышения конфиденциальности информации.

Выше несколько раз подчеркивалось, что свойством двукратной избыточности обладает произвольный сигнал. И это действительно так для реальных физических сигналов. Если в таком сигнале уменьшить вдвое полосу частот спектра без ущерба информативным признакам, то получится новый сигнал, который в свою очередь, как всякий произвольный сигнал, можно также выразить в мультипликативной форме. А это немедленно обнаружит его двукратную информативную избыточность. Значит, можно уже в 4 раза увеличить упомянутую производительность каналов связи. Иначе говоря, выявленное объективное свойство двукратной информативной избыточности произвольного сигнала теоретически позволяет организовать процедуру n-кратного преобразования произвольного сигнала, результатом которого является его сигнал-заместитель с уменьшенной в $N = 2^n$ раз полосой частот спектра, причем исходный сигнал восстанавливается из этого сигнала-заместителя математически точно (вернее будет сказать – с точностью до постоянного множителя и постоянной задержки).

К проблеме нелинейной обработки можно подойти также с позиций теории информации.

Линейные методы подавления помех основаны на работах Котельникова, Шеннона, Винера и сводятся либо к методу накопления - интегральный прием, либо к широкополосному кодированию, либо к оптимальной фильтрации. А какие вообще могут быть методы подавления помех? Чтобы выяснить это, полезно напомнить одну из ключевых теорем Шеннона [5] по теории информации. Математически она формулируется в виде:

$$C = W \log_2(1 + \frac{P_s}{P_n}),$$

где: C - информационная емкость сигнала, W - полоса частот спектра сигнала, P_s - средняя мощность сигнала и P_n - средняя мощность помехи. Информационная емкость выражает количество информации (в двоичных единицах), приходящееся на интервал времени. Применив символ I для обозначения количества информации, можно записать:

$$I = W \cdot T \cdot \log_2 (1 + \frac{P_s}{P_n}) \ ,$$

где T - интервал времени, в течение которого осуществляется передача сигнала. В таком виде теорема, являясь предельной, указывает предельное количество информации в сигнале заданной длительности, которое приемник примет со сколь угодно малой вероятностью ошибки. Это предельное количество информации линейно связано с полосой частот спектра сигнала и с его длительностью. Поскольку реальная помехоустойчивость определяется отношением сигнал/помеха, постольку ее повышение при заданном отношении требует увеличения количества информации. А это возможно либо за счет увеличения длительности сигнала, либо за счет увеличения полосы частот спектра. Увеличение длительности сигнала – это метод накопления, или интегральный прием. Например, можно несколько раз повторить сигнал и при сложении копий сигнал сложится арифметически, а помеха – алгебраически, что увеличит апостериорное отношение сигнал/помеха по сравнению с априорным. По признаку линейности увеличение полосы частот спектра аналогичен методу накопления, хотя и осуществляется нелинейными инструментами дискретизации и кодирования сигнала. Но теорема демонстрирует и два нелинейных метода увеличения количества информации. Пусть полоса частот спектра и его длительность остаются неизменными. Тогда увеличения количества информации можно добиться либо за счет уменьшения средней мощности помехи, либо за счет увеличения средней мощности сигнала. Поскольку помехи пока остаются неподконтрольными человеку, постольку единственным нелинейным методом оказывается метод такого неизвестного пока преобразования сигнала, который по своей сути оказывается эквивалентным увеличению его средней мощности. Теорему можно переписать в виде:

$$\frac{P_s}{P_n} = 2^{\frac{I}{W \cdot T}} - 1$$

и учесть практически всегда выполнимое неравенство:

$$2^{\frac{I}{W \cdot T}} >> 1$$

Тогда, обозначив $n = \dfrac{I}{W \cdot T}$, можно выразить сущность нелинейного метода повышения помехоустойчивости в виде:

$$P_s = P_n \cdot 2^n ,$$

которая сводится, таким образом, к искусственному увеличению средней мощности сигнала по отношению к средней мощности помехи для заданного сигнала.

Здесь уместно напомнить, что преобразование Гильберта позволяет работать с аналитическим сигналом, в частности, применив к нему формулу Муавра, извлечь из него квадратный корень:
$$\sqrt{Z(t)} = \sqrt{A(t)} \cdot e^{j \cdot \frac{\Psi(t)}{2}}$$

Действительная часть этого нового сигнала: $S_1(t) = \sqrt{A(t)} \cdot \cos \dfrac{\Psi(t)}{2}$

имеет вдвое уменьшенную полосу частот спектра в сравнении с исходным сигналом на одном уровне отсчета спектра. В этом и состоит сущность однократного нелинейного уменьшения спектра сигнала. Полученный сигнал с уменьшенной полосой частот спектра предназначен для передачи в канале связи вместо исходного сигнала, то есть является сигналом-заместителем исходного сигнала. Подстрочный индекс указывает количество (кратность) преобразований. Сигнал-заместитель в качестве результата n-кратного преобразования имеет вид:

$$S_n(t) = \left[A(t)\right]^{2^{-n}} \cdot \cos\left[2^{-n} \cdot \Psi(t)\right]$$

Ясно, что полоса частот его спектра в $N = 2^n$ раз меньше, чем у исходного сигнала и существенно меньше его динамика. Если теперь этот сигнал увеличить до уровня исходного сигнала, то в канал связи поступит уже новый – канальный сигнал:

$$S_{ch} = K_u \cdot S_n(t)$$

Это существенно более «медленный» сигнал в сравнении с исходным сигналом и собственное количество информации в нем много меньше, чем в исходном сигнале. Но по своему информационному содержанию он адекватен исходному, поскольку обеспечивает точное восстановление исходного сигнала. Методы практической реализации очевидны из приведенных выражений, однако сопряжены с целым рядом трудностей технологического порядка.

Таким образом, теоретическая возможность сжатия спектра сигнала открывает столь обширную перспективу практического использования выявленного свойства, что не будет преувеличением назвать эту перспективу новым научно-техническим направлением. Ясно, что основу этого направления составляет нелинейная технология обработки сигналов и поэтому вполне резонно ставить вопрос о развитии научно-технического направления нелинейной технологии обработки информации.

Ставить-то вопрос можно, но как его решать? Ведь вектор определен тогда и только тогда, когда известны обе его компоненты. Сигнал же в виде функции времени (1) представляет собой только одну компоненту вектора и для успешного практического применения мультипликативной формы, в том числе и для развития упомянутого заманчивого направления, необходимо либо научиться определять вторую компоненту по известной первой, либо всю проблему отнести к разряду принципиально неразрешимых и прекратить ее разработку, считая недоразумением. Однако вторая компонента вектора является гильбертовой трансформантой первой компоненты, а классический метод определения гильбертовой трансформанты известен [3]: это интегральное преобразование Гильберта:

$$Sg(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{\tau - t} \cdot d\tau$$

А это означает, что относить проблему к числу неразрешимых нет никаких оснований. Тем более, что можно указать еще один классический вариант определения гильбертовой трансформанты сигнала. Непосредственно из выражения (2), если развернуть его:

$$Z(t) = A(t) \cdot \cos\Psi(t) + j \cdot A(t) \cdot \sin\Psi(t)\ ,$$

следует, что гильбертова трансформанта сигнала (1) имеет вид:

$$Sg(t) = A(t) \cdot \sin\Psi(t) \qquad (9)$$

По аналогии с выражением (5), ее можно представить в виде:

$$Sg(t) = \frac{1}{j \cdot 2} \cdot A(t) \cdot e^{j \cdot \Psi(t)} - \frac{1}{j \cdot 2} \cdot A(t) \cdot e^{-j \cdot \Psi(t)}$$

или, выводя мнимую единицу из знаменателя, в виде:

$$Sg(t) = -j \cdot \frac{1}{2} \cdot A(t) \cdot e^{j \cdot \Psi(t)} + j \cdot \frac{1}{2} \cdot A(t) \cdot e^{-j \cdot \Psi(t)} \qquad (10)$$

Тогда сравнение выражений (10) и (5) выявляет процедуру получения гильбертовой трансформанты сигнала из собственно сигнала: надо компоненту сигнала с положительной фазой умножить на отрицательную мнимую единицу, а компоненту сигнала с отрицательной фазой умножить на положительную мнимую единицу. Таково свойство аналитического сигнала. Иногда эту процедуру рассматривают на спектральной [4] основе и приписывают спектру выявленное свойство. Но спектром оно наследуется в силу линейности преобразования Фурье. И практически реализуется именно на спектральной основе благодаря разработке алгоритмов быстрого преобразования Фурье. То есть, для получения гильбертовой трансформанты сигнала, например, в цифровых многофункциональных измерительных приборах типа анализаторов спектра, сигнал подвергают преобразованию Фурье, результат преобразования в области отрицательных частот умножают на положительную мнимую единицу, в области положительных частот – на отрицательную мнимую единицу, а затем полученный результат подвергают обратному преобразованию Фурье и результат этого преобразования является гильбертовой трансформантой сигнала с некоторой погрешностью, тем меньшей, чем больше количество отсчетов в исходной выборке сигнала. Продолжительность этой процедуры, очевидно, тем больше, чем больше количество отсчетов. То есть, налицо упомянутое ранее противоречие между быстродействием и точностью. Это потому, что метод основан на аддитивном представлении сигнала. Из этого представления, кстати, следует, что гильбертова трансформанта сигнала отличается от собственно сигнала одинаковым поворотом всех спектральных компонент сигнала на угол 90 градусов. Это дало основание для технической реализации [6] приближенного преобразования Гильберта с помощью широкополосных фазовращателей на линейных элементах. В 1985 г. была осуществлена экспериментальная проверка такого преобразования Гильберта для выделения модуля речевого сигнала и его фазы. Несмотря на то, что сам по себе широкополосный фазовращатель по указанному источнику удовлетворял критерию достаточно малой погрешности для решения поставленной задачи, решить эту задачу удовлетворительно на его основе не удалось: по выделенным информативным признакам исходный сигнал не восстанавливался, быть может, по технологическим причинам. Поэтому был организован поиск иных вариантов решения этой частной задачи - на основе мультипликативного представления. Такая процедура получения гильбертовой трансформанты реализуется иначе. Соотношение (8) выражает сигнал через компоненты информативной функции сигнала и этим можно воспользоваться. Средняя частота спектра часто априори известна, или выбирается субъектом исследования по тем или иным соображениям. Например, желательно, чтобы спектр не выходил за пределы некоторой частоты F. Тогда, выбрав круговую частоту в соответствии с равенством:

$$\varpi_0 = \pi \cdot F\ ,$$

следует сигнал умножить на квадратурные составляющие гармонического колебания с указанной частотой:

$$s1 = S(t) \cdot \cos(\varpi_0 \cdot t) = U(t) \cdot \cos^2(\varpi_0 \cdot t) - V(t) \cdot \sin(\varpi_0 \cdot t) \cdot \cos(\varpi_0 \cdot t)$$

$$s2 = S(t) \cdot \sin(\varpi_0 \cdot t) = U(t) \cdot \sin(\varpi_0 \cdot t) \cdot \cos(\varpi_0 \cdot t) - V(t) \cdot \sin^2(\varpi_0 \cdot t)$$

С учетом тригонометрических преобразований эти выражения можно переписать в виде:

$$s1 = \frac{1}{2}U(t) + \frac{1}{2}U(t) \cdot \cos\ (2 \cdot \varpi_0 \cdot t) - \frac{1}{2}V(t) \cdot \sin(2 \cdot \varpi_0 \cdot t)$$

$$s2 = \frac{1}{2}U(t) \cdot \sin(2 \cdot \varpi_0 \cdot t) - \frac{1}{2}V(t) + \frac{1}{2} \cdot V(t) \cdot \cos(2 \cdot \varpi_0 \cdot t),$$

откуда следует, что компоненты информативной функции $U(t)$ и $V(t)$ можно получить, отфильтровав составляющие результатов перемножения с удвоенной средней частотой. Такая процедура в цифровой технике получила название [7] комплексного детектирования сигналов и выполняется по функциональной схеме на рис. 1.

По приведенной схеме входной сигнал поступает одновременно на сигнальные входы двух аналоговых умножителей, на управляющие входы которых от квадратурного генератора поступают соответствующие гармонические колебания с частотой ϖ_0.

На выходе умножителей включены идентичные фильтры нижних частот с частотой среза $\frac{1}{2} \cdot F$.

С учетом общей задержки по времени, вносимой элементами схемы и обозначенной символом τ, можно оценить абсолютную инструментальную погрешность рассмотренной схемы по каждому каналу величинами:

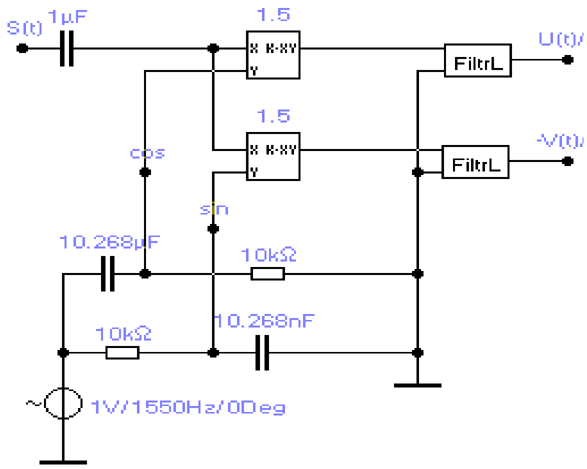

Рис.1

$$\Delta U = \sqrt{\left(U(t) - U_d(t-\tau)\right)^2} \quad \text{и} \quad \Delta V = \sqrt{\left(V(t) - V_d(t-\tau)\right)^2},$$

где $U_d(t-\tau)$ и $V_d(t-\tau)$ практические результаты комплексного детектирования. Выполнение этой процедуры на цифровой основе связано с затратой времени как на операции умножения, так и на организацию цифровой фильтрации все с тем же противоречием между быстродействием и точностью. Но описанное комплексное детектирование можно реализовать и на аналоговой элементной базе без каких-либо изменений структуры приведенной схемы. В этом случае быстродействие определяется лишь задержкой в аналоговом фильтре (для речи это единицы миллисекунд), а точность – инструментальной погрешностью используемых аналоговых элементов.

Рассмотренная процедура, терминологически определенная как комплексное детектирование, в сущности своей является разновидностью квадратурного преобразования частоты. Действительно, если в сигнале (1) среднюю частоту полагать равной 0, то он выродится в действительную компоненту информативной функции. Следовательно, рассмотренная процедура обеспечивает перенос спектра сигнала (1) на нулевую частоту – преобразование частоты «вниз». Ясно, что для восстановления исходного сигнала нужна обратная процедура – преобразование частоты «вверх». Но уже для двух компонент. Реализуется она двухканальным квадратурным преобразователем частоты.

Его функциональная схема представлена на рис. 2. Она включает в себя 4 умножителя и два сумматора и реализует функцию переноса спектра частот информативной функции на любую заданную частоту.

Известные тригонометрические преобразования:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

вполне поясняют работу квадратурного преобразования частоты по схеме на рис.2. Если на верхние по схеме входы квадратурного преобразователя подать сигналы с выходов схемы комплексного детектирования, а на нижние входы – сигналы с выходов квадратурного генератора в качестве опорного, то на выходах квадратурного преобразователя будут сформированы, с учетом погрешностей, сигналы:

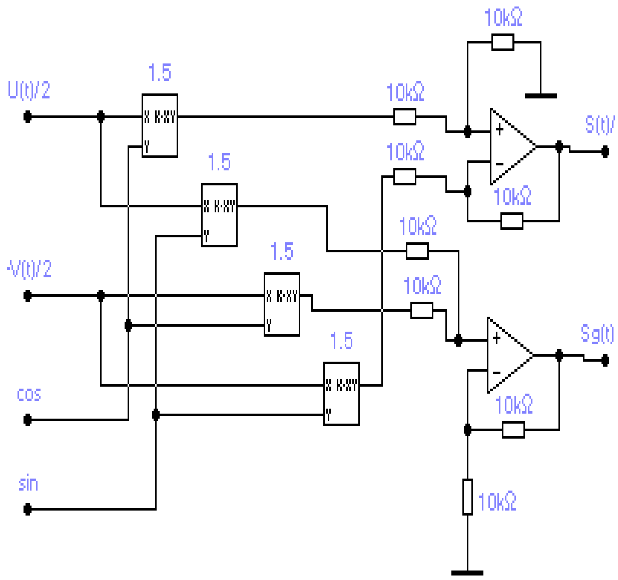

Рис. 2

$$S_k(t)=\left[U(t)-\Delta U\right]\cdot\cos\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]-\left[V(t)-\Delta V\right]\cdot\sin\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]+\Delta S$$

$$Sg_k(t)=\left[U(t)-\Delta U\right]\cdot\sin\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]+\left[V(t)-\Delta V\right]\cdot\cos\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]+\Delta Sg\ ,$$

где: $\Delta S=\Delta V\cdot\sin\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]-\Delta U\cdot\cos\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]$
и $\Delta Sg=-\Delta U\cdot\sin\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]-\Delta V\cdot\cos\left[\varpi_0\cdot(t-\tau)\right]$ - абсолютные погрешности восстановления исходного сигнала и его гильбертовой компоненты из соответствующих компонент информативной функции этого сигнала, естественно, с учетом задержки. Ясно, что выбор частоты, на которую требуется перенести спектр сигнала, вообще говоря, произволен, как уже упоминалось ранее. Следует заметить, что невозможность физической реализации идеальной фильтрации не позволяет применять рассмотренный метод для сигналов с постоянной составляющей или с частотой, близкой к 0. Поэтому метод на основе преобразования Фурье следует признать наиболее точным.

Таким образом, векторная интерпретация сигнала с одной лишь известной его компонентой не является препятствием для реализации нелинейных методов обработки сигналов уже на самой ранней стадии развития этих методов, например, [8]. Но, конечно, надо признать, что рассмотренные методы определения гильбертовой трансформанты сигнала к числу элегантных не относятся. Возможность такого определения на спектральной - линейной – основе, позволяет надеяться на существование неизвестного пока нелинейного (без фильтрации) метода (или методов) решения этой задачи. Поиск таких методов и представляется одним из ключевых звеньев развития нелинейной технологии.

В заключение полезно отметить, что изложенные рассуждения о мультипликативном подходе не являются исчерпывающими в смысле раскрытия идеи в целом. Дело в том, что в мультипликативном разложении фигурирует модуль сигнала, как величина неотрицательная, а это отнюдь не является обязательным условием мультипликативного представления. Действительно, общая форма такого представления имеет вид:

$$S(t)=b(t)\cdot\prod_{j=0}^{\infty}f_j(t)\ ,$$

частный случай которого принимает форму:

$$S(t) = \left[b(t) \cdot \prod_{j=1}^{\infty} f_j(t) \right] \cdot f_0(t),$$

в которой приняты обозначения: $A(t) = b(t) \cdot \prod_{j=1}^{\infty} f_j(t)$ для «модуля» и $f_0(t) = \cos\Psi(t)$ для фазового множителя. «Модуль» в данном случае взят в кавычки потому, что эта величина может быть и знакопеременной, поскольку не существует ограничений на знак этой величины, вытекающих непосредственно из структуры мультипликативного представления. Другими словами, величина $A(t)$ совсем не обязательно должна быть скалярной. Достаточно долгое время этот факт не представлялся очевидным и существенно ограничивал рамки аналитического исследования векторного представления сигналов.

Литература.

1. ***Океанов Е.Н., Прянишников В.А.*** Мультипликативный синтез сигналов. – Сб. научн. тр. /ВНИИЭП Повышение эффективности средств электроизмерительной техники. – Л.: 1990, с. 21-22.
2. ***Океанов Е.Н., Прянишников В.А.*** Способ передачи и приема аналоговых сигналов и устройство для его осуществления. А.С. СССР №1693726 от 11.07.1989 г.
3. ***Гоноровский И.С.*** Радиотехнические цепи и сигналы. Ч.1 - М.: «Советское радио», 1967. с. 166-176.
4. ***Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И.*** Введение в теорию сигналов. – М.: «Высшая школа», 1975.
5. ***Шеннон К.*** Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. Под ред. Р.Л.Добрушина. – М., ИЛ, 1963.
6. ***Алексенко А.Г., Коломбет Е.А., Стародуб Г.И.*** Применение прецизионных аналоговых ИС. – М.: «Радио и связь», 1981.
7. ***Марпл – мл.***
8. ***Океанов Е.Н.*** Патент РФ № 2106747, приоритет 05.03.1994 г.

P.S. *Автор будет признателен за любые отзывы и замечания по статье, а также за дополнения и предложения. Пишите на* ***okeanov@mail.ru***