От математики линейной к математике нелинейной

Океанов Е.Н.

Многолетние исследования мультипликативной формы [1] представления сигналов затруднены тем, что нелинейная по своей сущности математическая форма исследуется на основе традиционной линейной (аддитивной) формы в виде бесконечного ряда (его называют разложением):

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cdot f_i(t),$$

где: C_i - коэффициенты разложения, $f_i(t)$ - некие единичные функции в качестве базы разложения. Такая неадекватность методов исследования задаче исследования обусловила невысокую эффективность достаточно простых средств [2] реализации потенциальных возможностей мультипликативной формы или чрезмерную сложность более изощренных средств [3]. Становится актуальной, таким образом, проблема нелинейных методов математического исследования физических задач. Один из таких методов здесь и рассматривается.

Для начала вводится понятие изменчивости M в качестве собственной количественной характеристики всякой функции. Сущность этой характеристики лучше показать на следующем примере.

Пусть $S(t) = \sin[\alpha(t)]$ и $C(t) = \cos[\alpha(t)]$. Тогда:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\cos[\alpha(t)] = \frac{d\alpha}{dt}C(t) \quad \text{и} \quad \frac{dC}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\sin[\alpha(t)] = -\frac{d\alpha}{dt}S(t)$$

и на основании полученных соотношений можно ввести понятия изменчивости M_S функции $S(t)$:

$$M_S = \frac{d}{dt}\ln[S(t)] = \frac{1}{S(t)}\frac{dS}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{C(t)}{S(t)}$$

и, соответственно, изменчивости M_C функции $C(t)$:

$$M_C = -\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{S(t)}{C(t)},$$

что позволяет записать следующее равенство:

$$tg[\alpha(t)] = \frac{S(t)}{C(t)} = -M_C\cdot\frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{M_S}\cdot\frac{d\alpha}{dt},$$

откуда следует:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{-M_S M_C}$$

Значит, если функция $\alpha(t)$ выражает фазу (аргумент) гармонических функций $\sin[\alpha(t)]$ и $\cos[\alpha(t)]$, то производная этой фазы по своему аргументу является *угловой частотой, модуль которой оказывается средним геометрическим собственных изменчивостей* этих гармонических функций. Чтобы выяснить физический смысл изменчивости вообще, полезно рассмотреть известное уравнение тока $i(t)$ в замкнутом электрическом контуре, состоящем из последовательно включенных резистора R и конденсатора C:

$$R\cdot i + \frac{1}{C}\int i\cdot dt = 0$$

Его обычно дифференцируют по времени t:

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\cdot i=0$$

и обе части полученного результата делят на величину сопротивления $R \neq 0$:

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{C\cdot R}\cdot i=0$$

Величину $\tau = R\cdot C$ в традиции называть "постоянной времени", поскольку она характеризует инерционные свойства этого контура. Здесь уместно отступить от традиции и назвать изменчивостью M величину, обратную "постоянной времени":

$$M=\frac{1}{R\cdot C}$$

Тогда полученное уравнение принимает вид:

$$\frac{di}{dt}+M\cdot i=0,$$

откуда следует:

$$\frac{di}{dt}=-M\cdot i,$$

или:

$$\frac{1}{i(t)}\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}\ln[i(t)]=-M,$$

и далее:

$$\ln[i(t)]=-\int M(t)dt+B,$$

где B - постоянная интегрирования. Здесь полезно напомнить, что логарифмическая функция является безразмерной по своей сущности и потому под знаком логарифма по умолчанию предполагается не какая-либо физическая величина, а отношение двух величин одинаковой размерности. Поэтому постоянную B следует в данном случае понимать, как логарифм отношения:

$$B=\ln\left(\frac{I_a}{I_b}\right),$$

где I_a и I_b некая пара постоянных значений тока в контуре. Но и функцию тока $i(t)$ под знаком логарифма в левой части интегрального уравнения на самом деле следует также понимать, как логарифм отношения:

$$\ln[i(t)]=\ln\left[\frac{i(t)}{I_b}\right]$$

Тогда «правильная» запись интегрального уравнения примет вид:

$$\ln[i(t)]-\ln(I_b)=-\int M(t)dt+\ln(I_a)-\ln(I_b),$$

в котором логарифм тока I_b *одинаковым образом* входит в обе его части в качестве слагаемого и только поэтому оказывается справедливой приведенная выше «неправильная» форма этого уравнения, причем конкретное значение тока I_b оказывается несущественным. Ток I_a определяется из начальных условий:

$$I_a=i(t_0)$$

и общее решение уравнения становится очевидным:

$$i(t)=i(t_0)\cdot e^{-\int M(t)dt}$$

Отсюда ясно, что для функций времени величину, обратную "постоянной времени", можно понимать как инерционность, тогда как для функций всякой иной независимой переменной эта величина характеризует изменчивость (Mutability) функции, почему здесь и далее она так и называется. Ее размерность *всегда* обратна размерности независимой переменной данной функции. И здесь уместно следующее замечание.

Поскольку функции сами по себе не существуют, а являются лишь средством описания взаимодействия объектов, постольку изменчивость отображает не свойство функции, как таковой, а свойство описываемого процесса взаимодействия. Следовательно, всякий процесс имеет меру своей изменчивости в качестве собственного свойства, которая характеризует изменение процесса по отношению к собственно процессу. Математика и позволяет (в буквальном смысле слова) представить эту меру – изменчивость – в общем виде математического отношения:

$$M_{W1} = \frac{1}{W(t)} \frac{dW}{dt},$$

из которого следует, уже на основе сугубо математического свойства:

$$\frac{1}{W(t)} \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \ln[W(t)],$$

что произвольная функция $W(t)$, представляющая процесс взаимодействия объектов W и t, может быть выражена через изменчивость этого процесса экспонентой:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int M_{W1} dt}$$

Но, поскольку функция, описывающая процесс, является математическим носителем образа процесса, постольку в математике принято свойства процесса переносить на свойства функции, абстрагируясь от собственно процесса. В частности, легко проверить, что изменчивость в виде *линейной функции* порождает *нормальный закон* распределения вероятностей. Это, ведь, интересно. Видимо, нельзя считать случайным, что много закономерностей в физике связано с экспонентой. В такой же мере нельзя считать случайным, что экспонента нередко участвует в решении дифференциальных уравнений. Напрашивается мысль, что экспонента в математических представлениях играет существенно более важную роль, нежели те ее частные случаи, которые освоены в нынешней линейной математике. До поры эта мысль довольно туманна.

Между тем, термин "изменчивость" функции отражает только физический смысл этой характеристики, тогда как существенный интерес представляет и ее математический смысл. Непосредственно из определения изменчивости следует очевидное равенство:

$$\frac{dW}{dt} = M_{W1} \cdot W(t) \qquad (1)$$

Отсюда немедленно напрашивается определение изменчивости M_{W2} полученной производной:

$$M_{W2} = \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{dW}{dt}\right) = \frac{dt}{dW} \frac{d^2W}{dt^2},$$

которое позволяет записать равенство:

$$\frac{d^2W}{dt^2} = M_{W2} \cdot \frac{dW}{dt} \qquad (2)$$

Но это равенство на основании равенства (1) легко привести к виду:

$$\frac{d^2W}{dt^2} = M_{W1} \cdot M_{W2} \cdot W(t) \qquad (3)$$

и тогда становится очевидным глубокий математический смысл изменчивостей, связывающих данную функцию с любой ее производной (если она существует) конечным произведением соответствующих изменчивостей:

$$\frac{d^n W}{dt^n} = W(t) \cdot \prod_{i=0}^{n} M_{Wn} \tag{4}$$

Этот вывод представляется весьма важным, поскольку *линейную* операцию дифференцирования оказалось возможным выразить через *нелинейную* мультипликативную операцию в виде *конечного произведения* и тем самым *положить начало нелинейной математике*, строго адекватной математике линейной. Впрочем, это только часть вывода. Логика подсказывает очевидное обобщение и для последовательного вложения интеграла под интеграл общим числом m:

$$\frac{d^n W}{dt^n} = \frac{d^{-m} W}{dt^{-m}} \cdot \prod_{i=-m}^{n} M_{Wi}\ , \tag{5}$$

позволяющего сделать окончательный вывод: *конечное произведение соответствующих изменчивостей связывает любую производную с любым интегралом данной функции (если они существуют)*. В этом обобщении предполагается, следовательно, что интеграл можно представить в виде производной отрицательного порядка. Разумеется, надо убедиться в корректности такого представления, учитывая, что речь идет, естественно, об определенном интеграле с переменным верхним пределом.

Пусть некая функция $H(t)$ определена через такой интеграл:

$$H(t) = \int_0^t W(\lambda) d\lambda$$

Тогда ее производная по верхнему пределу интеграла равна:

$$\frac{dH}{dt} = W(t)$$

В точном математическом смысле это уравнение принимает вид:

$$\frac{d^1 H}{dt^1} = W(t),$$

но, поскольку линейная операция интегрирования является обратной по отношению к линейной операции дифференцирования, постольку, как и положено для степенных показателей, формальная отрицательная степень в производной может и должна отображать это свойство обратимости:

$$H(t) = \frac{d^{-1} W}{dt^{-1}}\ ,$$

которое далее выглядит именно вложением интеграла под интеграл:

$$\int_0^t H(\lambda) d\lambda = \int_0^t \left[\int_0^t W(\lambda) d\lambda \right] d\lambda = \frac{d^{-2} W}{dt^{-2}}\ ,$$

допускающее, в принципе, неограниченное продолжение. Ограничения накладываются лишь условиями решаемой задачи. Следуя изложенной логике, изменчивость функции $H(t)$ естественно определить выражением:

$$M_{W-1} = \frac{W(t)}{H(t)},$$

откуда следует:

$$W(t) = M_{W-1} \cdot H(t),$$

а изменчивость ее интеграла - выражением:

$$M_{W-2} = \frac{H(t)}{\int_0^t H(\lambda)d\lambda},$$

откуда, в свою очередь, следует:

$$H(t) = M_{W-2} \cdot \int_0^t H(\lambda)d\lambda,$$

на основании чего оказывается вполне корректным равенство:

$$W(t) = M_{W-1} \cdot M_{W-2} \cdot \int_0^t H(\lambda)d\lambda = M_{W-1} \cdot M_{W-2} \cdot \frac{d^{-2}W}{dt^{-2}},$$

от которого уже совсем легко продвинуться к уравнению (5) от уравнения (4). Понятно, что подстрочный индекс в изменчивости цифрой указывает порядок производной при положительном значении и порядок вложения интеграла при отрицательном значении, а буквой – принадлежность к данной функции. Есть, впрочем, заминка с нулевым индексом, которая проясняется следующим прозрачным образом:

$$M_{W0} = \frac{1}{W(t)}\frac{d^0W}{dt^0} = \frac{1}{W(t)}W(t) = 1$$

Полученное значение в выражение (5) входит множителем в составе конечного произведения и потому на результат не влияет, однако, и общности этого выражения не только не нарушает, но, скорее, подтверждает ее.

Логика настоящей работы предполагает, что соотношение (5) является основой нелинейного метода математического исследования если не всех, то хотя бы некоторых физических задач. В качестве иллюстрации применения такого метода можно изложить нечто вроде нелинейной теории однородного дифференциального уравнения второго порядка, не ограничиваясь постоянными коэффициентами в нем.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение:

$$a(t)\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = 0,$$

в котором коэффициенты $a(t), b(t), c(t)$ – заданные действительные функции. Разделив обе части этого уравнения на коэффициент $a(t) \neq 0$, можно получить приведенное уравнение с единичным коэффициентом при старшей производной. При этом вводятся обозначения:

$$u(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \qquad \text{и} \qquad v(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

Исследуется, следовательно, приведенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + u(t)\frac{dx}{dt} + v(t)x = 0, \tag{6}$$

Для каждого частного его решения x_1 и x_2 (а их всего два в данном случае) принимаются обозначения изменчивостей первого порядка:

$$M_{x1(1)} = \frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dt}, \qquad M_{x1(2)} = \frac{1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

и изменчивостей второго порядка:

$$M_{x2(1)} = \frac{dt}{dx_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{M_{x1(1)}}\frac{dM_{x1(1)}}{dt} + M_{x1(1)}, \qquad M_{x2(2)} = \frac{dt}{dx_2}\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{M_{x1(2)}}\frac{dM_{x1(2)}}{dt} + M_{x1(2)}$$

Здесь в подстрочном индексе цифра в скобках указывает частное решение. Тогда уравнение (6) преобразуется в систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_1}{dt^2}+u\frac{dx_1}{dt}+vx_1=0 \\ &\frac{d^2x_2}{dt^2}+u\frac{dx_2}{dt}+vx_2=0 \end{aligned},$$

которая, с учетом изменчивостей, приводится к виду:

$$\begin{aligned} &M_{x2(1)}M_{x1(1)}x_1+uM_{x1(1)}x_1+vx_1=0 \\ &M_{x2(2)}M_{x1(2)}x_2+uM_{x1(2)}x_2+vx_2=0 \end{aligned} \qquad (7)$$

и позволяет структурировать коэффициенты уравнения по признакам изменчивостей:

$$u=\frac{M_{x2(1)}M_{x1(1)}-M_{x2(2)}M_{x1(2)}}{M_{x1(2)}-M_{x1(1)}}, \qquad v=\frac{M_{x1(1)}M_{x1(2)}\left(M_{x2(2)}-M_{x2(1)}\right)}{M_{x1(2)}-M_{x1(1)}}$$

На основании выражений для изменчивостей второго порядка система (7) преобразуется в систему уравнений Риккати:

$$\begin{aligned} &\frac{dM_{x1(1)}}{dt}+M_{x1(1)}^2+uM_{x1(1)}+v=0 \\ &\frac{dM_{x1(2)}}{dt}+M_{x1(2)}^2+uM_{x1(2)}+v=0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Вообще говоря, в этом ничего удивительного нет, поскольку подстановка:

$$y=\frac{d}{dt}\ln x=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$$

за счет очевидных выражений:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \text{и} \qquad y^2=\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

преобразует уравнение (6) в частный случай уравнения Риккати:

$$\frac{dy}{dt}+y^2+uy+v=0, \qquad (9)$$

а система (8) представляет это уравнение в изменчивостях первого порядка для каждого его решения. Очевидно, что функция $x(t)$ является общим решением уравнения (6):

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t),$$

а каждое частное решение имеет вид:

$$x_1(t)=C_1e^{\int M_{x1(1)}dt} \qquad \text{и} \qquad x_2(t)=C_2e^{\int M_{x(2)}dt}$$

и, следовательно, можно утверждать, что изменчивость первого порядка есть функция, вполне определяющая в данном случае характер решения дифференциального уравнения (6). А значит, – имеет свою изменчивость m_{M1} первого порядка такую, что должно выполняться равенство:

$$M_{x1}=e^{\int m_{M1}dt+\ln C} \qquad (10)$$

где C – постоянная интегрирования. А это, в свою очередь, означает систему очевидных равенств:

$$\begin{aligned} &\frac{dM_{x1(1)}}{dt}=m_{M1}M_{x1(1)} \\ &\frac{dM_{x1(2)}}{dt}=m_{M1}M_{x1(2)} \end{aligned},$$

подстановка которых в систему (8) преобразует уравнения Риккати в квадратные уравнения:

$$M_{x1(1)}^2 + (u + m_{M1})M_{x1(1)} + v = 0$$
$$M_{x1(2)}^2 + (u + m_{M1})M_{x1(2)} + v = 0 \qquad (11)$$

Но надо, конечно, рассматривать не систему этих уравнений, а одно квадратное уравнение:

$$M_{x1}^2 + (u + m_{M1})M_{x1} + v = 0\,, \qquad (12)$$

решения которого:

$$M_{x1(1,2)} = -\frac{u + m_{M1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u + m_{M1}}{2}\right)^2 - v} \qquad (13)$$

и порождают систему (11). Уравнение (12) можно назвать *уравнением изменчивости,* и именно оно является *настоящим характеристическим* уравнением дифференциального уравнения (6), тогда как традиционное характеристическое уравнение является лишь его частным случаем, о котором речь пойдет ниже. Его решение (13) содержит неизвестную (изменчивость изменчивости) величину m_{M1}. Для ее определения полезна производная обеих частей уравнения (12):

$$2M_{x1}\frac{dM_{x1}}{dt} + \frac{d}{dt}(u + m_{M1})M_{x1} + (u + m_{M1})\frac{dM_{x1}}{dt} + \frac{dv}{dt} = 0\,,$$

которую подстановкой:

$$m_{M1} = \frac{1}{M_{x1}}\frac{dM_{x1}}{dt}$$

легко преобразовать в иную форму уравнения (12):

$$M_{x1}^2 + \left[\frac{1}{2m_{M1}}\frac{d}{dt}(u + m_{M1}) + \frac{1}{2}(u + m_{M1})\right]M_{x1} + \frac{1}{2m_{M1}}\frac{dv}{dt} = 0$$

и из сравнения его корней с корнями (13) (либо собственно уравнений) получить систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{m_{M1}}\frac{d}{dt}(u + m_{M1}) = u + m_{M1}$$
$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = 2m_{M1}$$

Эту систему можно переписать в более удобном виде:

$$\frac{dm_{M1}}{dt} - m_{M1}^2 - um_{M1} + \frac{du}{dt} = 0$$
$$m_{M1} = \frac{d}{dt}\ln\sqrt{v} \qquad (14)$$

Величина m_{M1} оказывается уникальной характеристикой в том смысле, что вполне определенным образом связывает между собой коэффициенты дифференциального уравнения (6). Действительно, непосредственно из этой системы вытекает уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\sqrt{v} - \left(\frac{d}{dt}\ln\sqrt{v}\right)^2 - u\frac{d}{dt}\ln\sqrt{v} + \frac{du}{dt} = 0 \qquad (15)$$

Его следует понимать, как общее условие, которому должны удовлетворять коэффициенты уравнения (6), чтобы последнее обладало свойствами однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Но полезно присмотреться и к первому уравнению системы (14). Его удобно переписать в виде линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{du}{dt} - m_{M1}u = m_{M1}^2 - \frac{dm_{M1}}{dt},$$

в котором неизвестной предполагается величина u. Тогда общее решение полученного уравнения принимает стандартный вид:

$$u = e^{\int m_{M1}dt}\left[\int\left(m_{M1}^2 - \frac{dm_{M1}}{dt}\right)e^{-\int m_{M1}dt}dt + C_{u1}\right]$$

В нем удобно применить подстановку:

$$z = e^{-\int m_{M1}dt}$$

Тогда, как легко убедиться:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(m_{M1}^2 - \frac{dm_{M1}}{dt}\right)e^{-\int m_{M1}dt}$$

и:

$$u = \frac{1}{z}\left[\int d\left(\frac{dz}{dt}\right) + C_{u1}\right] = \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dt} + C_{u2}\right) + \frac{1}{z}C_{u1}$$

Но в соответствии с равенством (10) можно заключить:

$$z = \frac{C}{M_{x1}}$$

и тогда:

$$u = \frac{M_{x1}}{C}\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{M_{x1}}\right) + \frac{M_{x1}}{C}C_{u2} + \frac{M_{x1}}{C}C_{u1}$$

или:

$$u = -\frac{1}{M_{x1}}\frac{dM_{x1}}{dt} + \frac{C_{u1} + C_{u2}}{C}M_{x1}$$

Это значит, что на основании все того же равенства (10) можно записать:

$$u(t) = -m_{M1}(t) + BM_{x1}(t),$$

где:

$$B = \frac{C_{u1} + C_{u2}}{C} = const$$

Учитывая, что:

$$m_{M1} = \frac{d}{dt}\ln M_{x1} \quad \text{и} \quad M_{x1} = \frac{d}{dt}\ln x,$$

можно записать интересное соотношение:

$$u(t) = \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{x^B}{M_{x1}}\right)$$

и уточнить его, выразив только через x:

$$u(t) = \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{x^{B+1}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

На этом, собственно, и кончается нелинейная теория, от которой можно перейти к практике.

Пример. Уравнение Хилла:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\Phi(x)+\lambda\right]y=0$$

Здесь $\Phi(x)$ – произвольная функция, λ – константа и уравнение формально выглядит, как частный случай однородного уравнения. Из сравнения с уравнением (6):

$$u=0, \qquad v=\Phi(x)+\lambda$$

Ясно, что из множества произвольных функций $\Phi(x)$ надо выбрать те функции $\Psi(x)$, которые будут удовлетворять уравнению (15), поэтому подстановка $v=\Psi(x)+\lambda$ в уравнение (15) дает условие:

$$2\frac{d^2\Psi}{dx^2}\left[\Psi(x)+\lambda\right]=3\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2, \tag{16}$$

при котором только функции $\Psi(x)$ превращают уравнение Хилла действительно в частный случай однородного уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\Psi(x)+\lambda\right]y=0,$$

для которого:

$$m_{M1}=\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx}$$

и уравнение изменчивости (настоящее характеристическое уравнение) имеет вид:

$$M_{y1}^2+\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx}\cdot M_{y1}+\Psi(x)+\lambda=0$$

Отсюда следует:

$$M_{y1(1,2)}=-\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx}\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx}\right]^2-\left[\Psi(x)+\lambda\right]}$$

Если обозначить:

$$p(x)=\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx} \quad \text{и} \quad q(x)=\sqrt{\left[\frac{1}{2\left[\Psi(x)+\lambda\right]}\frac{d\Psi}{dx}\right]^2-\left[\Psi(x)+\lambda\right]},$$

то общее решение уравнения Хилла имеет вид:

$$y=C_1e^{-\int\left[p(x)-q(x)\right]dx}+C_2e^{-\int\left[p(x)+q(x)\right]dx},$$

где постоянные интегрирования определяются традиционно.

На этом можно закончить рассмотрение общего случая уравнения (6) и обратить внимание на его частный случай. Если вернуться к уравнению изменчивости (12), то легко заметить, что это настоящее характеристическое уравнение превращается в традиционное характеристическое уравнение при условии:

$$m_{M1}=0,$$

а этому условию отвечает равенство:

$$v=const \tag{17}$$

в соответствии со вторым уравнением системы (14). И тогда кажется почти очевидным, что коэффициент u может быть произвольной функцией, особенно, если нет желания решать необычное уравнение Риккати из системы (14). Но его и не надо решать потому, что при условии (17) уравнению (15) удовлетворяет только константа:

$$u = const\ ,$$

а не произвольная функция, как это легко проверить. Другими словами, уравнение (6) при условии (17) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами. Пусть это будет уравнение тока $i(t)$ в замкнутой цепи из последовательно включенных резистора с сопротивлением R, конденсатора емкостью C и катушки индуктивности с индуктивностью L:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Это уравнение отличается тем, что изменчивость его решений является также постоянной величиной:

$$M_{i1} = const$$

(одинаковой, кстати, для всех их производных), отчего в уравнении Риккати (9) производная:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

и оно непосредственно превращается в квадратное. Изменчивость в этом случае определяется корнями этого уравнения:

$$M_i = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = const$$

. Поэтому общее решение этого частного случая имеет хорошо известный вид:

$$i(t) = i_1(t_0) \cdot e^{M_{i1} t} + i_2(t_0) \cdot e^{M_{i2} t}\ ,$$

где $i_1(t_0)$ и $i_2(t_0)$ – значения токов, определенные (или заданные) из начальных условий. Их можно рассматривать, как *фиксирующие* признаки в том смысле, что из бесчисленного множества решений они фиксируют только вполне определенные.

Изложенная иллюстрация применения изменчивостей является по существу первым нелинейным методом исследования достаточно широкого круга физических задач на основе мультипликативной формы представления. Не исключено, что подобные методы применимы и в иных физических задачах, особенно, если они найдут доброжелательный интерес у математиков, профессиональная строгость которых позволит проверить эти методы «на прочность».

Что ж... Возможно, найдется немало суровых критиков настоящей работы. Но, во-первых, на это можно только надеяться. Во-вторых, уже только за критику они достойны самой высокой признательности. Потому, что это и будет означать развитие нелинейной математики.

Литература.

1. ***Океанов Е.Н., Прянишников В.А.*** Мультипликативный синтез сигналов. – Сб. научн. тр. /ВНИИЭП Повышение эффективности средств электроизмерительной техники. – Л.: 1990, с. 21-22.
2. ***Океанов Е.Н., Прянишников В.А.*** Способ передачи и приема аналоговых сигналов и устройство для его осуществления. Авторское свидетельство СССР N1693726 от 11.07.1989.
3. ***Океанов Е.Н.*** Способ передачи и приема аналоговых сигналов и устройство для его реализации. Патент Российской Федерации N2106747 от 05.03.1994 .